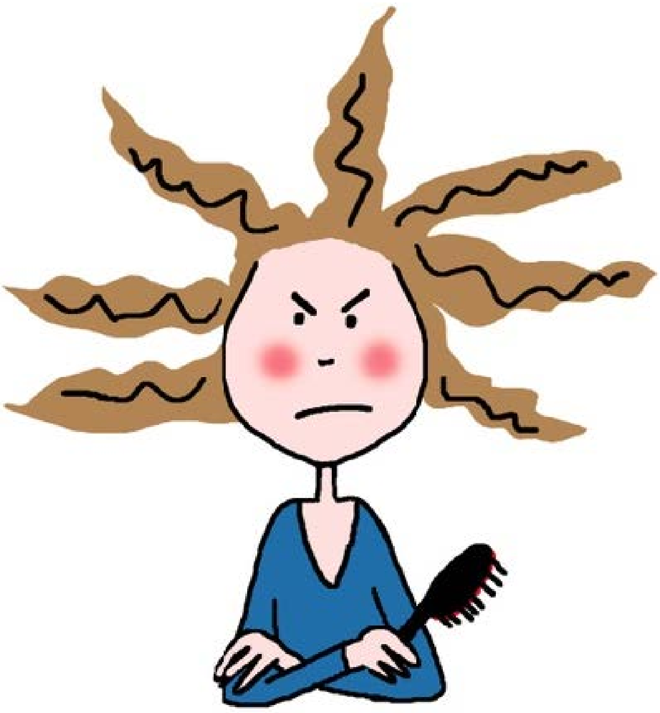
INSA de Toulouse
Département STPI
1^{ere} année

ÉLECTROSTATIQUE

Exercices de Travaux Dirigés



Année Universitaire 2022-2023

Auto-évaluation - Notions de base - Calcul vectoriel

1 Produit scalaire

On considère en coordonnées cartésiennes trois points $A(1,2,0)$, $B(2,1,0)$ et $C(0,0,1)$.

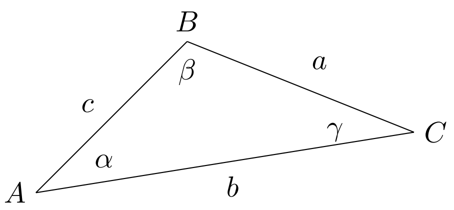
1. Déterminer les modules des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

2. Calculer les angles θ, φ, ψ respectivement entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$

3. Déterminer la projection $\overrightarrow{OE}$ du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur le vecteur $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}$

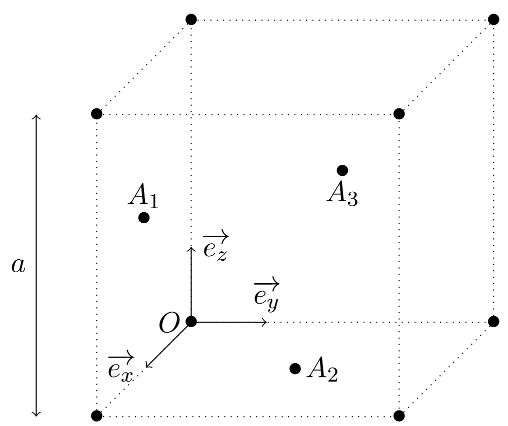
4. Déterminer le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ normal au plan (ABC)

5. En utilisant le produit scalaire, démontrer la relation d'Al Kashi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos(\gamma)$ dans le triangle quelconque ABC



2 Produit mixte et cosinus directeurs

Soit un cube d'arête a comportant un atome à chaque sommet et au centre de chaque face.



1. Quelles sont les coordonnées des atomes A_1, A_2 et A_3, plus proches voisins de l'atome placé en O

2. Quel est l'angle γ formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$?

3. Calculer le volume du rhomboèdre construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ et $\overrightarrow{OA_3}$ par le produit mixte de ces trois vecteurs.

4. Soit le plan P passant par les points $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$ et $C(0,0,a)$, déterminer les cosinus directeurs de la perpendiculaire à ce plan, ou, en d'autres termes, les composantes du vecteur unitaire orthogonal à ce plan.

3 Dérivée d'un vecteur unitaire

On considère dans le plan (xOy) d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'origine O tels que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{e_z}$ forment un trièdre direct. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tournent autour de l'axe $\overrightarrow{e_z}$ et l'angle entre $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{u}$ est appelé θ. Calculer $\dfrac{d\overrightarrow{u}}{d\theta}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{v}}{d\theta}$.

Séance 1 - Systèmes de coordonnées

1 Les coordonnées cylindriques

1. Exprimer les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_\rho}$,$\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_z}$ associés aux coordonnées cylindriques en fonction des vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ des coordonnées cartésiennes. Vérifier qu'ils sont orthogonaux.

2. Exprimer les éléments de longueur, de surface et de volume en coordonnées cylindriques.

3. Exprimer la surface S_D d'un disque de rayon R.

4. Exprimer la surface latérale S_L d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.

5. Exprimer le volume V_C d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.

2 Les coordonnées sphériques

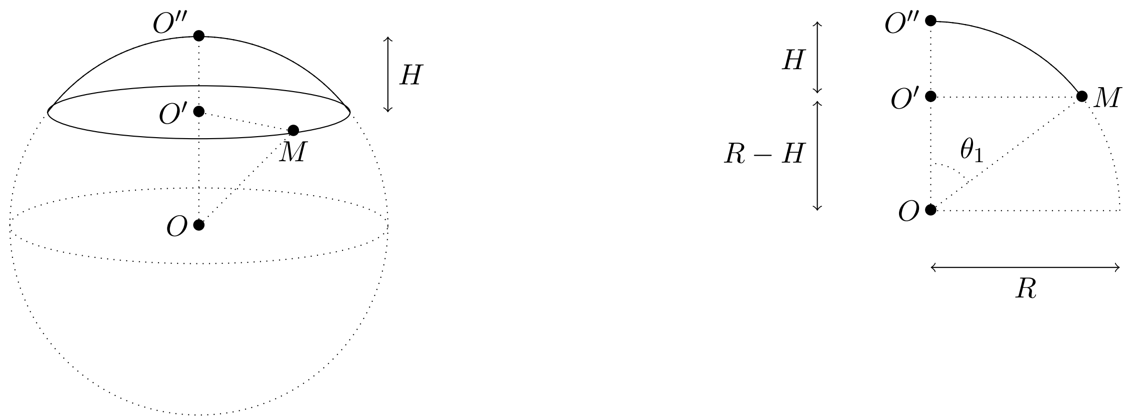
1. Exprimer les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ associés aux coordonnées sphériques en fonction des vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ des coordonnées cartésiennes. Vérifier qu'ils sont orthogonaux.

2. Exprimer les éléments de longueur, de surface et de volume pour les coordonnées sphériques.

3. Exprimer la surface S_S d'une sphère de rayon R.

4. Exprimer le volume V_B d'une boule de rayon R.

5. On considère une sphère de centre O et de rayon $R = OM = OO''$. Exprimer la surface S_C de la calotte sphérique ci-dessous, c'est-à-dire la portion de sphère reposant sur le disque de rayon $O'M$. Exprimer le résultat d'abord en fonction de R et θ_1 puis en fonction de R et la hauteur de la calotte H.



Séance 2 - Opérateurs vectoriels

1 Les opérateurs différentiels

Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{r} = x\ \overrightarrow{e_x} + y\ \overrightarrow{e_y} + z\ \overrightarrow{e_z}$. On note r le module de $\overrightarrow{r}$ c'est-à-dire $r = ||\overrightarrow{r}||$.

1. Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}\ (r)$ en coordonnées cartésiennes.

2. Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$ en coordonnées cartésiennes.

3. Toujours en coordonnées cartésiennes, exprimer div $\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\right)$. En déduire $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$.

2 Définition du gradient

On rappelle que l'expression de la différentielle d'une fonction scalaire U est :

- en coordonnées cartésiennes : $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$;

- en coordonnées cylindriques : $dU = \frac{\partial U}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial z}dz$;

- en coordonnées sphériques : $dU = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi}d\varphi$.

1. Rappeler l'expression générale du vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ en coordonnées sphériques.

2. En utilisant la définition du gradient : $dU = \overrightarrow{\text{grad}}\ U.\overrightarrow{dl}$, retrouver l'expression du gradient en coordonnées sphériques.

3. Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}\ (r)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$ en coordonnées sphériques. Comparer aux résultats de l'exercice 1.

4. Exprimer $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ U$, où U est un champ de scalaires. En déduire une condition générale pour qu'un champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire.

Auto-évaluation - Autour des opérateurs différentiels

1. À partir de l'expression du vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et en utilisant la définition du gradient, retrouver l'expression du gradient en coordonnées cylindriques.

2. Montrer que pour tout champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\overrightarrow{A} - \overrightarrow{\Delta}\ \overrightarrow{A}$.
Pour la simplicité des calculs, on démontrera la relation en utilisant les coordonnées cartésiennes même si elle est évidemment vérifiée dans tous les systèmes de coordonnées.

Séance 3 - Calcul de circulation

1 Circulation d'un champ de vecteurs suivant une courbe

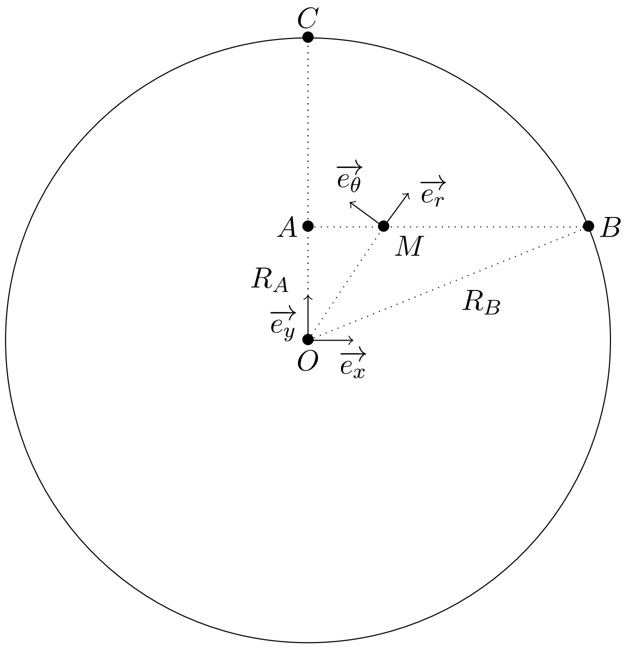
On considère un champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{V} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3}$ avec $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$.

1. Exprimer la circulation $\mathscr{C}_1$ du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ suivant le parcours $A \to B$ défini par le segment de droite $[AB]$ en utilisant les coordonnées cartésiennes. Exprimer le résultat en fonction de R_A et R_B.

2. Exprimer la circulation $\mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_{A\to C} + \mathscr{C}_{C\to B}$ du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ suivant le parcours $A \to C \to B$, défini par le segment de droite $[AC]$ puis l'arc de cercle $\widehat{CB}$ de rayon $OB = R_B = OC$ en utilisant les coordonnées cylindriques. Exprimer le résultat en fonction de R_A et R_B.

3. Comparer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Que peut-on en conclure ?

4. Comment pouvait-on prévoir ce résultat en utilisant un résultat de la séance précédente ?



Auto-évaluation - Étude d'un champ de force

On considère le champ de force $\overrightarrow{F}$ de composantes $F_x = 2Kxz$; $F_y = Kyz$; $F_z = F_z(x, y)$ où K est une constante réelle.

1. Quelle est l'unité de la constante K ?

2. Déterminer l'expression de la composante $F_z(x, y)$ afin que ce champ de force dérive d'une énergie potentielle U telle que $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U$, sachant que le vecteur $\overrightarrow{F}$ est nul en $O(0, 0, 0)$.

3. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $U(x, y, z)$ en prenant le plan (xOy) comme origine des énergies potentielles.

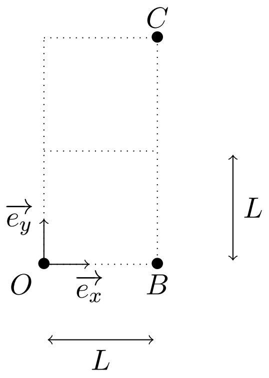
4. En utilisant une propriété des forces conservatives, calculer la circulation $\mathscr{C}$ de la force $\overrightarrow{F}$ le long de l'hélice d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

entre les points M_1 et M_2 définis en coordonnées cylindriques par $M_1(\theta = 0)$ et $M_2(\theta = 2\pi)$.

Auto-évaluation - Calcul de circulation suivant deux parcours

On considère un champ électrostatique $\overrightarrow{E}(x, y) = Ky\overrightarrow{e_x} + Kx\overrightarrow{e_y}$, avec K une constante.



1. Quelle est la dimension de la constante K ?

2. Exprimer en fonction de K et L la circulation $\mathscr{C}_1$ du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en suivant un segment de droite entre les points $O(0, 0)$ et $C(L, 2L)$.

3. Exprimer en fonction de K et L la circulation $\mathscr{C}_2$ du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en suivant une ligne brisée, de $O(0, 0)$ à $B(L, 0)$ puis de $B(L, 0)$ à $C(L, 2L)$.

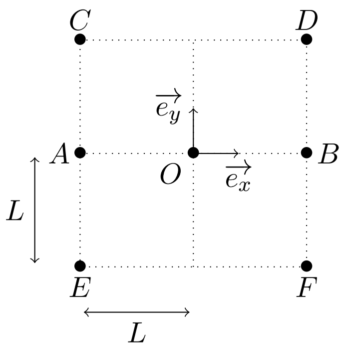
4. Comparer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Que peut-on en conclure ?

5. Exprimer $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}$.

6. Exprimer, si il existe, le potentiel électrostatique V associé au champ électrostatique $\overrightarrow{E}$?

Auto-évaluation - Calcul de circulation suivant trois parcours

Soit le champ de forces suivant : $\overrightarrow{F} = Ky^2\overrightarrow{e_x}$. On définit dans le plan (xOy) les points de coordonnées suivantes : $A(-L; 0)$, $B(L; 0)$, $C(-L; L)$, $D(L; L)$, $E(-L; -L)$ et $F(L; -L)$.



1. Quelle est la dimension de la constante K ?

2. Exprimer la circulation $\mathscr{C}_1$ de la force $\overrightarrow{F}$ le long du chemin $ACDB$ puis la circulation $\mathscr{C}_2$ le long du chemin $AEFB$.

3. Comparer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Que peut-on en conclure ?

4. Exprimer la circulation $\mathscr{C}_3$ de la force $\overrightarrow{F}$ suivant le segment $[AB]$.

5. Que peut-on conclure cette fois-ci ? Justifier.

6. Démontrer ce résultat par un calcul.

7. Exprimer, si elle existe, l'énergie potentielle U associée à la force $\overrightarrow{F}$?

Séance 4 - Invariances et symétries

1 Invariances et symétries

Faire l'étude complète des invariances et symétries dans les trois cas suivants :

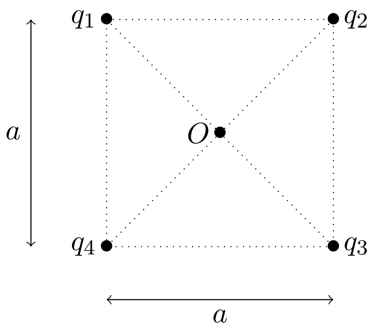
1. un fil infini portant une distribution de charge uniforme λ_0

2. un plan infini portant une distribution de charge uniforme σ_0

3. une sphère chargée uniformément en volume avec une densité ϱ_0

2 Étude des symétries

On considère quatre charges placées sur les sommets d'un carré de côté a. Déterminer en utilisant des considérations de symétrie, la direction du champ électrostatique au centre du carré dans les cas suivants :



1. $q_1 = q = q_3 = -q_2 = -q_4$

2. $q_1 = q = q_3 = -q_2$; $q_4 = -2q_1$

3. $q_1 = q = -q_2$; $q_3 = -q_4 = 2q_1$

Séance 5 - Calcul de la charge portée par un objet

Auto-évaluation - Calculs de charges

Le cuivre porte le numéro atomique $Z = 29$. Il a pour masse atomique $\mathscr{M} = 63$ g.mol^{-1} et pour densité $d = 9$. On rappelle que le nombre d'Avogrado vaut $\mathscr{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}.

1. Exprimer la quantité N de charges négatives et positives contenue dans un volume V=1 cm^3 de cuivre. Faire l'application numérique.

2. Quelle est la proportion k d'électrons à enlever pour que la charge totale de ce volume V de cuivre atteigne une valeur Q =0,1 μC ?

3. On répartit uniformément cette charge $Q = 0{,}1$ μC au sein d'un fil cylindrique de longueur $L = 1$ m et de rayon $R = 1$ mm. Exprimer la densité volumique de charge ϱ associée et faire l'application numérique ?

4. On répartit uniformément cette charge $Q = 0{,}1$ μC à la surface d'un fil cylindrique de longueur $L = 1$ m et de rayon $R = 1$ mm. Exprimer la densité surfacique de charge σ associée et faire l'application numérique ?

5. On néglige désormais la section du fil de longueur $L = 1$ m. Exprimer la densité linéique de charges λ associée et faire l'application numérique ?

1 Distribution volumique

On considère la distribution volumique de charge suivante :

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0 \left(1 + a\dfrac{r^2}{R^2}\right) \text{ si } r \leq R \\ 0 \text{ si } r > R \end{cases}$$

Dans ces expressions, ϱ_0, a et R sont des constantes et r désigne la distance de l'origine O au point M.

1. Décrire par une phrase cette distribution de charges.

2. Exprimer la charge totale Q correspondant a cette distribution en fonction de ρ_0, a et R.

Cette distribution de charges génère un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dont l'expression en coordonnées sphériques est :

$$\overrightarrow{E} = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$$

3. Analyser les invariances de cette distribution de charges et simplifier l'expression de $\overrightarrow{E}$ en conséquence.

4. Analyser les plans de symétrie de cette distribution de charges contenant le point M dans les cas suivants. En déduire la direction de $\overrightarrow{E}$ et simplifier l'expression de $\overrightarrow{E}$ en conséquence.

a. M est un point quelconque
b. M est confondu avec le point O

2 Distribution surfacique

On considère une sphère de rayon R, chargée en surface avec une distribution non-uniforme dont l'expression en coordonnées sphériques est $\sigma = \sigma_0 \sin\theta$.

1. Donner l'expression de σ_0 si on veut que la sphère porte une charge totale égale à Q.

Cette distribution de charges génère un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dont l'expression en coordonnées sphériques est :

$$\overrightarrow{E} = E_r(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\theta} + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}$$

3. Analyser les invariances de cette distribution de charges et simplifier l'expression de $\overrightarrow{E}$ en conséquence.

4. Analyser les plans de symétrie de cette distribution de charges contenant le point M dans les cas suivants. En déduire la direction de $\overrightarrow{E}$ et simplifier l'expression de $\overrightarrow{E}$ en conséquence.

a. M est un point quelconque
b. M est un point de l'axe (Oz)
c. M est un point du plan (xOy)
d. M est confondu avec le point O

Séance 6 - Charges ponctuelles

Auto-évaluation - Force électrostatique et force de gravitation

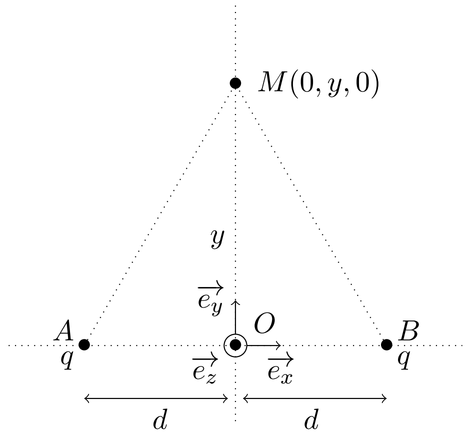
1. Quel est le rapport k entre la force de gravitation et la force électrostatique qui s'exercent entre deux particules de masse m et m' et de charges respectives q et q' ? On rappelle que la constante de gravitation est $G = 6,67 \times 10^{-11}$ (SI). Donner l'unité de G dans les unités de base du Système International.

2. Que devient ce rapport dans le cas de deux protons dont la masse est $m_p = 1,672 \times 10^{-27}$ kg et la charge est $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C ?

3. Quelle devrait être la masse M de deux sphères de cuivre portant chacune une seule charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C afin que la force de gravitation et la force électrostatique soient de même intensité ?

1 Force électrostatique dans le plan médiateur

Deux charges q positives sont supposées maintenues immobiles en A et B. On appelle O le milieu du segment $[AB]$ et on définit un repère orthonormé formé par un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$ selon la direction du segment $[AB]$ et un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_y}$ orthogonal à $[AB]$. La longueur du segment $[AB]$ vaut $2d$.



1. Grâce à l'analyse des symétries, déterminer la direction du champ électrostatique en un point M quelconque situé sur l'axe (Oy) ?

2. Grâce à l'analyse des symétries, prévoir la valeur du champ électrostatique lorsque le point M est confondu avec le point O. En déduire que le champ électrostatique admet un maximum sur l'axe (Oy) à une hauteur y_0 avec $y_0 \in \mathbb{R}^{+*}$.

3. Exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ au point M en fonction de q, y, ε_0 et d.

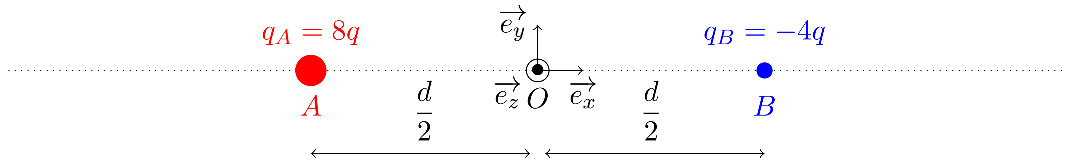
4. En déduire l'expression de la force de Coulomb $\overrightarrow{F}$ que subit une charge q' placée au point M et discuter du sens de $\overrightarrow{F}$ en fonction du signe de q'.

5. Déterminer la hauteur y_0 pour laquelle le champ électrostatique est maximal.

6. Tracer l'allure de la variation de $E_y(y)$ le long de l'axe (Oy) pour les y positifs et négatifs.

2 Force électrostatique sur un axe

Une charge ponctuelle de valeur $q_A = 8q = 8 \times 10^{-9}$ C est placée à une distance $d = 6$ cm d'une autre charge ponctuelle de valeur $q_B = -4q = -4 \times 10^{-9}$ C. Ces deux charges sont supposées immobiles. On donnera dans chaque cas les expressions littérales et numériques des résultats.



1. Quelle est la force $\overrightarrow{F}_{A\to B}$ qu'exerce la charge q_A sur la charge q_B ? Et la force $\overrightarrow{F}_{B\to A}$?

2. Quelle est la force $\overrightarrow{F_O}$ exercée par la superposition des deux charges sur une troisième charge ponctuelle q, placée au point O situé à mi-distance des deux charges q_A et q_B ?

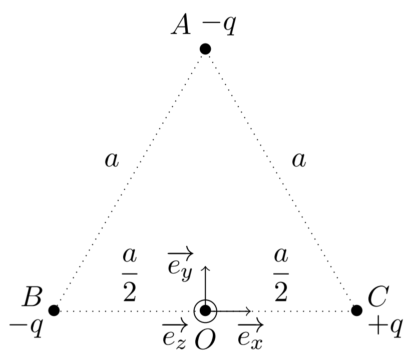
3. Exprimer l'abscisse x_0 du point M de l'axe (Ox) où le champ électrostatique $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_B}$ résultant de la superposition des charges q_A et q_B est nul.

Auto-évaluation - Charges sur un triangle équilatéral

Trois charges $-q$, $+q$ et $-q$ supposées immobiles sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral ABC de coté a, comme représenté sur le schéma ci-contre.

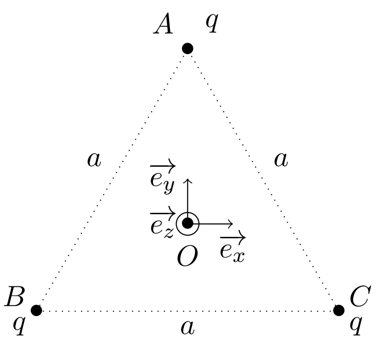
1. Exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé en A par les deux autres charges ?

2. En déduire la force de Coulomb $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce sur la charge placée en A ?



Auto-évaluation - Encore un triangle équilatéral

On considère dans le plan (xOy) un triangle équilatéral de côté a portant une charge q positive à chacun de ses sommets. On place l'origine du repère O à l'orthocentre du triangle. On se propose de calculer le champ électrostatique en tout point de l'axe (Oz).



1. Analyser les plans de symétrie du système et prévoir la direction du champ électrostatique généré par ces trois charges en un point M situé sur l'axe (Oz).

2. Exprimer le champ électrostatique généré par ces trois charges ponctuelles en un point M situé l'axe (Oz).

3. Justifier que le module du champ électrostatique admet un maximum sur l'axe (Oz).

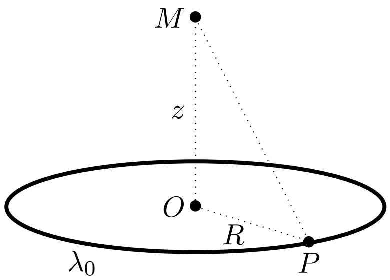
4. Exprimer la valeur de z_0 pour laquelle le module du champ électrostatique est maximal.

Séance 7 - Calcul direct

1 Calcul direct du champ électrostatique sur l'axe d'un anneau

On considère un anneau filiforme d'axe (Oz), d'épaisseur nulle, et de rayon R chargé avec une densité linéique de charges uniforme égale à λ_0. Cet anneau génère un champ électrostatique dont l'expression en coordonnées cylindriques est de la forme :

$$\overrightarrow{E} = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{e_\theta} + E_z(r,\theta,z)\overrightarrow{e_z}$$



1. Quelles sont les invariances du système physique et comment se simplifie l'expression de $\overrightarrow{E}$ en conséquence ?

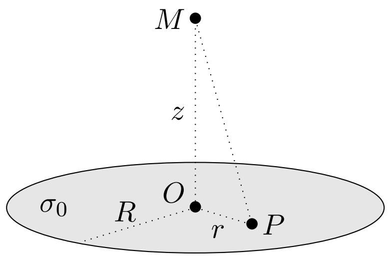
2. Quels sont les plans de symétrie du système contenant le point M et comment se simplifie l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ pour :
a. un point M quelconque
b. un point M situé dans le plan (xOy)
c. un point M situé sur l'axe (Oz)
d. un point M situé en O

3. Exprimer le champ électrostatique en un point M quelconque de l'axe (Oz) situé à une hauteur z.

2 Calcul direct du champ électrostatique sur l'axe d'un disque

On considère à présent un disque de rayon R chargé avec une densité superficielle de charges σ_0 uniforme. On admettra que l'analyse des invariances et symétries donne le même résultat qu'au cas précédent.

Exprimer le champ électrostatique en un point M quelconque de l'axe (Oz) situé à une hauteur z.



3 Calcul direct du champ électrostatique généré par un plan infini

Déduire de la question précédente le champ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité σ.

Séance 8 - Théorème de Gauss intégral

Quand l'électrostatique sert en biologie

Soit un fil rectiligne infini, uniformément chargé avec une densité de charges linéique $-\lambda_0$ négative. Ce fil est orienté suivant l'axe z. On se propose de calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique générés par ce fil en tout point M de l'espace situé à une distance r de l'axe du fil.

1. Analyser les invariances du système, choisir le système de coordonnées le mieux adapté et donner les variables dont dépend le champ électrique $\overrightarrow{E}$.

2. Décrire tous les plans de symétrie contenant le point M et en déduire l'orientation du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dans les cas suivants :
a. le point M est un point quelconque
b. le point M est situé sur l'axe (Oz)

3. En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en tout point M de l'espace.

4. En déduire l'expression du potentiel électrostatique V en fonction notamment de r et λ_0. On fixera l'origine des potentiels en $r = R$, c'est-à-dire $V(r = R) = 0$.

5. Tracer sur un graphe les variations du module du champ électrostatique et du potentiel électrostatique en fonction de r.

6. Quel commentaire peut-on faire sur la continuité du champ électrostatique ?

7. Une molécule d'ADN, constitue un exemple concret de fil uniformément chargé négativement. Le long de la double hélice, chaque nucléotide porte un ion phosphate négatif de charge $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C. Les interactions électrostatiques gouvernent des processus biologiques fondamentaux tels que le repliement de l'ADN au sein des chromosomes. Nous supposerons ici que la molécule d'ADN est rectiligne. Calculez sa densité linéique de charge λ_0 sachant que la distance entre deux nucléotides est de $d = 0,34$ nm.

8. Donnez l'expression de la force électrostatique $\overrightarrow{F_E}$ que ressent un ion positif de charge $+e$, situé à une distance r, de l'axe de la double hélice d'ADN.

9. Cet ion, au sein d'une solution biologique, est soumis en permanence à une agitation provoquée par l'ensemble des collisions aléatoires qu'il effectue avec les molécules de la solution. Ceci se traduit par une force $\overrightarrow{F_A}$ de direction aléatoire au cours du temps dont la valeur est de l'ordre de $F_A = 10^{-14}$ N. Calculez la distance critique r_c, en deçà de laquelle la valeur absolue du module de la force électrostatique exercée par la molécule d'ADN sur cet ion sera supérieur au module F_A de la force aléatoire d'agitation. On rappelle que $\varepsilon_0 = 8,85410^{-12}$ F.m^{-1}.

Séance 9 - Théorème de Gauss intégral

1- Plan infini uniformément chargé

Soit un plan infini, infiniment mince et uniformément chargé, avec une densité de charges superficielle $+\sigma_0$, positive. La perpendiculaire à ce plan est orientée suivant l'axe (Oz). On se propose de calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique générés par ce plan en tout point M de l'espace situé à une distance z de ce plan.

1. Analyser les invariances du système, choisir le système de coordonnées le mieux adapté et donner les variables dont dépend le champ électrique $\overrightarrow{E}$.

2. Décrire tous les plans de symétrie contenant le point M et en déduire l'orientation du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ dans les cas suivants :
a. le point M est un point quelconque
b. le point M est situé dans le plan (xOy)

3. En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en tout point M de l'espace.

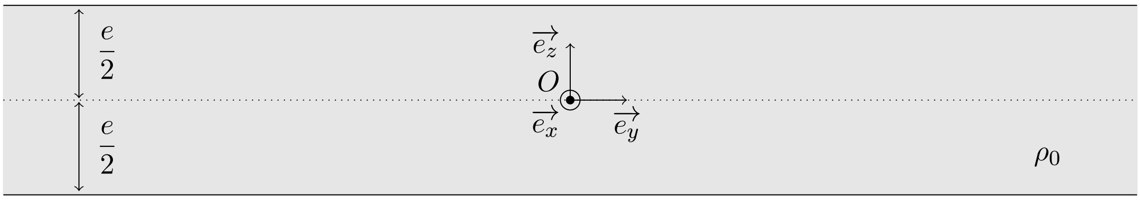
4. En déduire l'expression du potentiel électrostatique V en fonction notamment de σ et z. On fixera l'origine des potentiels en $z = 0$, c'est à dire que $V(z = 0) = 0$.

5. Tracer sur un graphe les variations du module du champ électrostatique et du potentiel électrostatique en fonction de z pour les z positifs et les z négatifs.

6. Quels commentaires peut-on faire sur la continuité du champ et du potentiel électrostatiques ?

2- Plaque infinie uniformément chargée en volume

Soit une plaque infinie d'épaisseur e et uniformément chargée en volume avec une densité ρ_0 positive.



1. Analyser les invariances du système, choisir le système de coordonnées le mieux adapté et donner les variables dont dépend le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$.

2. Décrire tous les plans de symétrie contenant M et en déduire l'orientation du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$.

3. En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en tout point M de l'espace à l'intérieur et à l'extérieur de la plaque.

4. Exprimer le potentiel électrostatique V à l'intérieur et à l'extérieur de la plaque. On fixe l'origine des potentiels en $z = 0$ c'est-à-dire $V(z = 0) = 0$.

5. Tracer les variations du module du champ électrostatique et du potentiel en fonction de z pour les z positifs et les z négatifs.

6. Quels commentaires peut-on faire sur la continuité du champ et du potentiel électrostatiques ?

7. Quel lien peut-on faire avec les résultats trouvés pour le plan infini uniformément chargé en surface ?

Auto-évaluation : Sphère chargée en surface

Soit une sphère de rayon R portant une charge Q positive uniformément répartie en surface.

1. Analyser les invariances du système, choisir le système de coordonnées le mieux adapté et donner les variables dont dépend le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$.

2. Décrire tous les plans de symétrie contenant le point M et en déduire l'orientation du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$.

3. Donner l'expression de la densité superficielle de charge σ_0 portée par la sphère.

4. En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en tout point M de l'espace à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. On exprimera le résultat d'abord en fonction de σ puis de Q. Quel commentaire peut-on faire sur la valeur du champ électrostatique à l'extérieur ?

5. Exprimer le potentiel électrostatique V à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. On exprimera le résultat d'abord en fonction de σ puis de Q.

6. Tracer les variations du module du champ et du potentiel électrostatiques en fonction de r.

7. Quels commentaires peut-on faire sur la continuité du champ et du potentiel électrostatiques ?

Auto-évaluation - Boule chargée en volume

Soit une boule de rayon R portant une charge Q positive uniformément répartie en volume. L'analyse des invariances et symétries donne les mêmes résultats qu'à l'exercice précédent.

1. Donner l'expression de la densité volumique de charge ρ_0 portée par la boule.

2. En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ en tout point M de l'espace à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. On exprimera les résultats d'abord en fonction de ρ_0 puis de Q. Quel commentaire peut-on faire sur le résultat obtenu à l'extérieur ?

3. Exprimer le potentiel électrostatique V à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. On exprimera le résultat en d'abord fonction de ρ_0 puis de Q.

4. Tracer les variations du module du champ électrique et du potentiel en fonction de r.

5. Quels commentaires peut-on faire sur la continuité du champ et du potentiel électrostatiques ?

Séance 10 - Forme locale du théorème de Gauss

Champ créé par un cylindre de révolution - Méthode des équations locales

On considère un cylindre de révolution d'axe (Oz) de rayon R, de longueur infinie et portant une densité de charge constante ρ_0. On se propose d'utiliser la forme locale du théorème de Gauss pour calculer la valeur du champ électrostatique en tout point M de l'espace.

1. Analyser les invariances du système, choisir le système de coordonnées le mieux adapté et donner les variables dont dépend le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$.

2. Décrire tous les plans de symétrie contenant M et en déduire l'orientation du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$.

3. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss, calculer, à une constante C_1 près, l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en tout point M situé à l'intérieur du cylindre.

4. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss, calculer, à une constante C_2 près, l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ en tout point M situé à l'extérieur du cylindre.

5. Connaissant la valeur du champ sur l'axe (Oz) grâce à l'analyse des symétries, déterminer la valeur de la constante C_1 et donc l'expression finale du champ électrostatique à l'intérieur du cylindre.

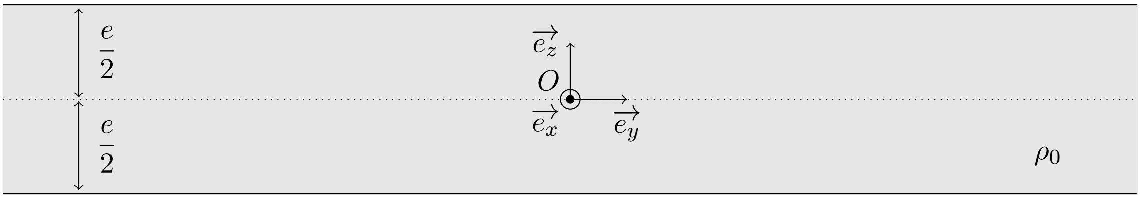
6. En utilisant la continuité du champ électrostatique en $r = R$, déterminer la valeur de la constante C_2 et donc l'expression finale du champ électrostatique à l'extérieur du cylindre.

7. Exprimer le potentiel électrostatique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Pour déterminer les constantes d'intégration, on fixera $V(r = R) = 0$.

8. Tracer les variations du module du champ électrostatique et du potentiel en fonction de r.

Auto-évaluation - Utilisation de la forme locale pour la plaque

On considère la plaque infinie d'épaisseur e, chargée en volume de manière uniforme avec la densité ρ_0, traitée en séance 10.



1. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss, calculer à une constante C_1 près, l'expression du champ électrostatique à l'intérieur de la plaque.

2. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss, calculer à une constante C_2 près, l'expression du champ électrostatique au-dessus de la plaque.

3. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss, calculer à une constante C_3 près, l'expression du champ électrostatique en-dessous de la plaque.

4. Trouver la valeur de C_1 à partir de la valeur du champ dans la plan (xOy), connue grâce à l'analyse des symétries.

5. Trouver les valeurs de C_2 et C_3 en invoquant la continuité du champ électrostatique en $z = \pm\frac{e}{2}$.

Auto-évaluation - Utilisation de la forme locale pour la boule

On considère la boule de rayon R uniformément chargée en volume avec une densité ρ_0 traitée en auto-évaluation à la suite de la séance 10.

1. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss, calculer à une constante C_1 près, l'expression du champ électrostatique à l'intérieur de la boule.

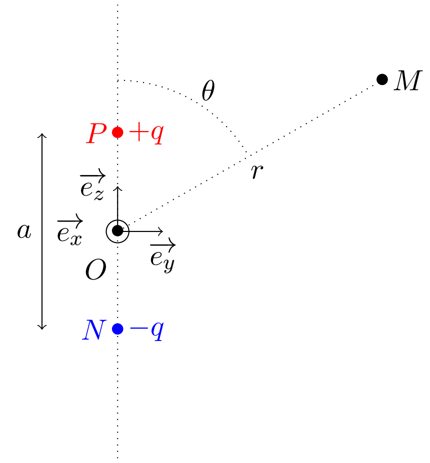
2. En utilisant la forme locale du théorème de Gauss, calculer à une constante C_2 près, l'expression du champ électrostatique à l'extérieur de la boule.

3. Trouver la valeur de C_1 à partir de la valeur du champ au point O où $r = 0$, connue grâce à l'analyse des symétries.

4. Trouver les valeurs de C_2 en invoquant la continuité du champ électrostatique en $r = R$.

Séance 11 - Étude du dipôle électrostatique

On considère deux charges ponctuelles de valeurs $+q$ et $-q$ situées respectivement en un point P et un point N de l'axe (Oz) séparées d'une distance a et formant un dipôle électrostatique. Le point P a pour coordonnées $P(0,0,a/2)$ et le point N a pour coordonnées $N(0,0,-a/2)$. Le but de l'exercice est de calculer l'expression du potentiel électrostatique et d'en déduire le champ électrostatique en tout point M de l'espace situé à une grande distance du dipôle. L'exercice sera traité en coordonnées sphériques où le potentiel sera noté $V(r,\theta,\varphi)$ et le champ électrostatique $\overrightarrow{E} = E_r(r,\theta,\varphi)\ \overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\ \overrightarrow{e_\theta} + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\ \overrightarrow{e_\varphi}$



1. Quelles sont les invariances du système ? En déduire comment se simplifient les expressions de V et $\overrightarrow{E}$ données ci-dessus.

2. Décrire les plans de symétrie du système contenant le point M et en déduire comment se simplifie l'expression de $\overrightarrow{E}$ dans les cas suivants :
a. pour un point M quelconque
b. pour un point M situé sur l'axe (Oz)
c. pour un point M situé dans le plan (xOy)

3. Montrer que lorsque la distance r est très grande par rapport à a, c'est-à-dire $r >> a$, l'expression du potentiel électrostatique en coordonnées sphériques est :

$$V \approx \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

4. En déduire l'expression du champ électrostatique en coordonnées sphériques.

5. On rappelle qu'une équipotentielle est une surface où le potentiel à une valeur fixe. Donner l'expression de l'équipotentielle où le potentiel a la valeur V_0 sous la forme d'une équation du type $r = f(\theta)$.

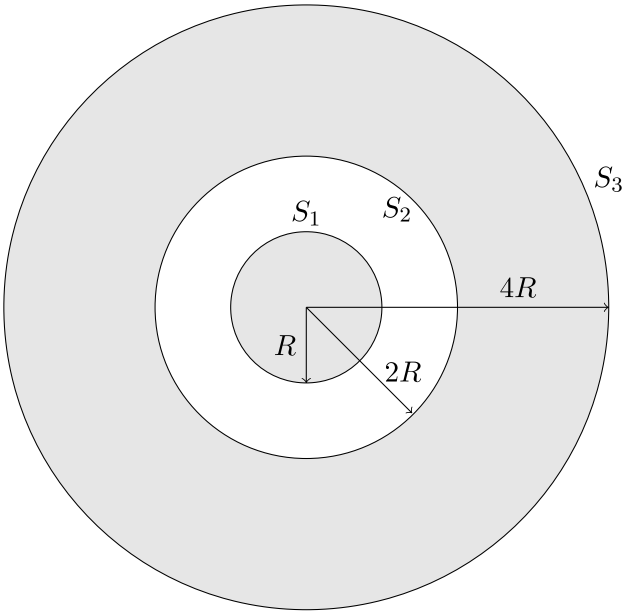
6. On rappelle qu'une ligne de champ est une courbe qui en tout point de l'espace est colinéaire au vecteur champ électrostatique. En posant $\overrightarrow{E} = k\overrightarrow{dl}$ où $\overrightarrow{dl}$ est le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques, donner l'équation d'une ligne de champ sous la forme d'une équation du type $r = g(\theta)$.

7. Tracer dans un plan à φ constant, le plan (zOy) par exemple, les équipotentielles et les lignes de champ résultant de l'approximation $r >> a$, c'est-à-dire d'équation $r = f(\theta)$ et $r = g(\theta)$. On représentera les équipotentielles où $V > 0$ en rouge, les équipotentielles où $V < 0$ en bleu et l'équipotentielle où $V = 0$ en noir. Les lignes de champ seront représentées en vert, orientées, en se rappelant qu'elles sont orthogonales aux équipotentielles.

8. Expliquer quelles modifications il faudrait apporter à ces tracés lorsque l'approximation $r >> a$ n'est plus valide, c'est-dire près du dipôle et en particulier au point O ?

Séance 12 - Étude de conducteurs sphériques

On considère une sphère conductrice isolée, de rayon R, qui est entourée d'une deuxième sphère conductrice creuse également isolée et neutre, dont le rayon intérieur est $2R$ et le rayon extérieur $4R$. La sphère intérieure est chargée avec une charge totale Q. On appelle S_1 la surface de la sphère intérieure de rayon R, S_2 la surface intérieure de la sphère extérieure de rayon $2R$ et S_3 la surface extérieure de la sphère extérieure de rayon $4R$.



1. Expliquer comment se répartissent les charges sur les sphères conductrices.

2. Exprimer le potentiel pour $r \geq 4R$ et en déduire le potentiel V_2 de la sphère extérieure.

3. Exprimer, en utilisant le théorème de Gauss, le champ électrostatique dans l'espace compris entre les deux sphères, c'est-à-dire pour $R \leq r \leq 2R$.

4. Exprimer la circulation de ce champ entre la surface S_1 et la surface S_2.

5. En déduire la différence de potentiel $V_1 - V_2$, et la valeur du potentiel V_1 de la sphère intérieure.

6. Exprimer la capacité C du condensateur ainsi constitué ?

7. Sans vous aider des résultats précédents, et en utilisant le théorème de superposition, établir l'expression du potentiel en tout point de l'espace.

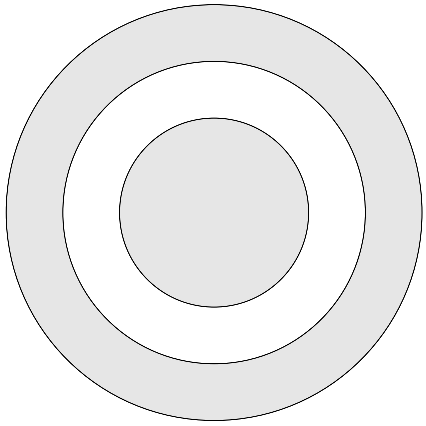
8. Exprimer en fonction de Q, R et ε_0 la valeur des densités superficielles de charges σ_1, σ_2 et σ_3 portées respectivement par les surfaces S_1, S_2 et S_3.

9. Tracer en fonction de r l'évolution du module du champ électrostatique E et du potentiel électrostatique V en faisant apparaître les valeurs des points remarquables en abscisse et en ordonnée de ces graphes.

10. Quels commentaires pouvez-vous-faire sur la continuité de E et de V ?

2 Condensateur

Soit un condensateur formé de deux armatures sphériques conductrices en influence totale, l'une contenant l'autre. L'armature intérieure porte initialement une charge Q. Lorsqu'on fait varier le potentiel auquel est portée l'armature extérieure en découlera-t-il une variation :



1. de la charge portée par l'armature intérieure ?

2. du champ électrique entre les deux armatures ?

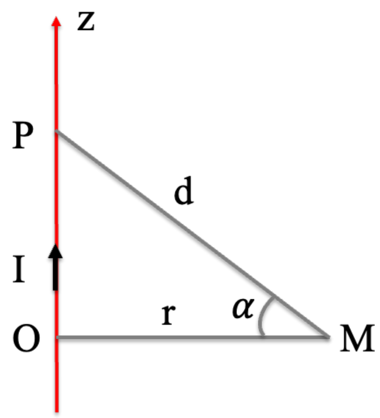
3. du potentiel de l'armature intérieure ?

4. de la charge totale de l'armature extérieure ?

Séance 13 : Magnétostatique

I- Fil rectiligne infini parcouru par un courant I

On considère un fil rectiligne infini orienté suivant l'axe z. Ce fil est parcouru par un courant électrique I constant .



1°) Etudier les invariances du système et choisir le système de coordonnées le mieux adapté à son étude. Préciser de quelles variables dépendent le champ magnétique $\vec{B}$ et le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point M de l'espace.

2°) Analyser les plans de symétrie et d'anti-symétrie du système et en déduire l'orientation du champ magnétique $\vec{B}$ et du potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point M de l'espace.

3°) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ par la méthode directe issue de la loi de Biot et Savart.

4°) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en utilisant le théorème d'Ampère dans sa forme intégrale et en choisissant un contour fermé astucieux.

5°) Pourquoi le champ magnétique $\vec{B}$ n'est-il pas nul sur le fil ?

6°) Quelle est la valeur du module du champ magnétique à 1cm du fil pour un courant de 1A.

7°) Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$en utilisant la forme locale : $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ et en considérant que $\vec{A} = \vec{0}$, à une distance $r = r_0$ du fil.

8°) Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$en utilisant la forme intégrale : $\oint \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS}$ et en considérant toujours que $\vec{A} = \vec{0}$, à une distance $r = r_0$ du fil. On choisira astucieusement un contour fermé et une surface ouverte pour mener à bien ce calcul.

Auto-évaluation : Boucle circulaire parcourue par un courant I

On considère un fil circulaire de centre O et de rayon R. Cette boucle de courant est perpendiculaire à l'axe z et elle est parcourue par un courant électrique I constant. On cherche à calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'axe z.

1°) Analyser les plans de symétrie et d'anti-symétrie du système et en déduire l'orientation du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'axe z.

2°) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ par la méthode directe.

3°) Donner la valeur du champ magnétique au point O.

Séance 14 : Magnétostatique

I- Cylindre infini parcouru par un courant I

On considère un fil cylindre de rayon a et d'axe z et de longueur supposée infinie. Ce cylindre est parcouru dans sa longueur par un courant électrique I constant.

1°) Etudier les invariances du système et choisir le système de coordonnées le mieux adapté à son étude. Préciser de quelles variables dépendent le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'espace.
2°) Analyser les plans de symétrie et d'anti-symétrie du système et en déduire l'orientation du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M de l'espace.
3°) Sachant que la densité de courant volumique $\vec{j_V} = j_0\vec{e_z}$ parcourant ce fil cylindrique est uniforme, exprimer $\vec{j_V}$ en fonction de I et a.
4°) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ à l'intérieur du cylindre en utilisant le théorème d'Ampère dans sa forme intégrale et en choisissant un contour fermé astucieux.
5°) Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ à l'extérieur du cylindre en utilisant le théorème d'Ampère dans sa forme intégrale et en choisissant un contour fermé astucieux.
6°) Commenter la valeur du champ magnétique au centre du fil. Le champ magnétique est-il continu à la traversée de la surface du cylindre ?
7°) Retrouver l'expression du champ magnétique à l'intérieur du fil cylindrique en utilisant la forme locale du théorème d'Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ et la valeur particulière du champ magnétique au centre du fil déduite de l'analyse des symétries.
8°) Retrouver l'expression du champ magnétique à l'extérieur du fil cylindrique en utilisant la forme locale du théorème d'Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ et la propriété de continuité du champ magnétique.

Auto-évaluation : Calcul du potentiel Vecteur

On reprend les résultats de l'exercice précédent mais on cherche désormais à calculer le potentiel vecteur $\vec{A}$ à partir des expressions du champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur et à l'extérieur du fil.

1°) Analyser les plans de symétrie et d'anti-symétrie du système et en déduire l'orientation du potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point M de l'espace.
2°) Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ à l'intérieur et à l'extérieur du fil en utilisant la forme locale : $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ et en considérant que $\vec{A} = \vec{0}$, à la surface du fil cylindrique.
8°) Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}(M)$ à l'intérieur et à l'extérieur du fil en utilisant la forme intégrale : $\oint \vec{A}.\vec{dl} = \oiint \vec{B}.\vec{dS}$ et en considérant toujours que $\vec{A} = \vec{0}$, à la surface du fil cylindrique. On choisira astucieusement un contour fermé et une surface ouverte pour mener à bien ce calcul.

Définition des opérateurs différentiels dans les différents systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$
$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} +$ $\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_\rho} +$ $\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\theta) - \frac{\partial E_\rho}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta E_\varphi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi}\right)\overrightarrow{e_r} +$ $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_\varphi}$
$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$	$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$	$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$