

Licence de Physique Chimie (PHYS3-MQ-PC) – licence de Physique (PHYS3-MQ-PIE)

Travaux Dirigés (Texte 1, durée 6h)**I. Rayonnement du corps noir, constante de Planck**

Avec un spectromètre on mesure le spectre des photons émis par le soleil ; on trouve un spectre proche de celui d'un corps noir avec un maximum à la longueur d'onde $\lambda = 520 \text{ nm}$.

1. Qu'appelle-t-on 'rayonnement du corps noir' et 'catastrophe ultraviolette' prédite par la loi de Rayleigh-Jeans ?

La loi de Rayleigh-Jeans est en contradiction avec l'observation expérimentale du spectre d'émission d'un corps noir.

2. Rappeler comment l'introduction de la constante de Planck a permis d'interpréter correctement le spectre d'émission du corps noir.

On rappelle l'expression de la fonction de Planck en fonction de la longueur d'onde λ et de la température T

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{E_\lambda}{k_B T}} - 1} \text{ où } E_\lambda = \frac{hc}{\lambda}, k_B \text{ est la constante de Boltzmann et } h \text{ la constante de Planck}$$

3. Quelle est la dimension de la grandeur physique $B(\lambda, T)$?

4. En posant $x = \frac{E_\lambda}{k_B T}$, montrer que la fonction de Planck passe par un maximum lorsque

$$x = 5(1 - e^{-x})$$

5. La solution (numérique) de cette équation est $x = 4,96511423$. En déduire la loi de Wien :

$$\lambda_m T = 0,29 \text{ cm } ^\circ K.$$

6. Calculer la température $T_\odot$ associée au spectre du soleil.

7. Retrouver la loi de Rayleigh-Jeans à partir de la loi de Planck en faisant tendre la constante de Planck h vers zéro.

II. Effet photoélectrique :

La cathode d'une cellule photoélectrique est recouverte d'une couche de césium. Le seuil photoélectrique du Césium est $\lambda_0 = 662 \text{ nm}$.

PHOTOEMISSION ET POTENTIEL D'ARRET

1. Quelle est la fréquence seuil ?

2. Si on éclaire la photocathode avec une radiation $\lambda = 700 \text{ nm}$, que se passe-t-il ?

3. Quelle est l'énergie minimale W_s , exprimée en Joules puis en électron-volt, qui est nécessaire pour extraire un électron de la photocathode ?

4. Si la cathode est éclairée par un rayonnement monochromatique $\lambda = 560 \text{ nm}$, quelle est la vitesse maximale d'un électron au sortir de la cathode ?

5. Quel potentiel faut-il appliquer à la photocathode pour annuler le courant d'électrons ?

RENDEMENT QUANTIQUE

1. Quelle est l'expression du rendement quantique, probabilité qu'un électron de fréquence ν de provoquer l'émission d'un électron ?

2. On considère que lorsque la tension est suffisante, l'intensité devient indépendante du potentiel accélérateur et atteint une valeur limite i_s appelée courant de saturation. Pour un métal donné i_s est

proportionnel à ϕ : $i_s(\nu) = k(\nu)\phi(\nu)$, où $k(\nu)$ est la sensibilité énergétique de la photocathode et $\phi(\nu)$ est le flux de photons (énergie lumineuse transportée par seconde). Par quelle relation sont liés le rendement quantique et la sensibilité énergétique ?

III. Spectre de l'atome d'Hydrogène, Série de Balmer

Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est constitué, dans sa partie visible, de quatre raies notées H_α , H_β , H_γ , H_δ de longueurs d'onde respectives dans le vide : 656,27 nm, 486,13 nm, 434,05 nm et 410,17 nm.

1. Sachant que les raies émises sont bleue, indigo, rouge et violette, restituer à chaque radiation sa couleur.

2. En 1885, le physicien suisse Johann Balmer remarque que les longueurs d'onde λ (exprimées en nm) de ces quatre radiations satisfont à une relation empirique :

$$\lambda = \lambda_0 \frac{k^2}{k^2 - 4} \text{ avec } \lambda_0 = 364,6 \text{ nm et } k \in \mathbb{N}.$$

a) Indiquer la plus petite valeur possible de k . En déduire la longueur d'onde de la raie correspondante.

b) Quelles valeurs doit prendre k pour retrouver les autres raies visibles du spectre ?

3. Nous savons aujourd'hui que les niveaux d'énergie quantifiés de l'atome d'hydrogène sont donnés (en eV) par la relation :

$$E_n = \frac{E_0}{n^2} \text{ avec } E_0 = -13,6 \text{ eV et } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Que représente E_0 pour l'atome d'hydrogène ?

b) Etablir, en fonction de n , l'expression de la fréquence $\nu_{n,2}$ des radiations émises lorsque cet atome passe d'un niveau excité $n > 2$ au niveau excité $n = 2$.

c) Retrouver l'expression empirique de Balmer donnée à la question 2.

d) A quelle transition correspond l'émission de la radiation de longueur d'onde λ_0 ?

e) Tracer le diagramme représentant les transitions entre les différents niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène pour les quatre raies H_α , H_β , H_γ , H_δ de la série de Balmer.

4. Excitation-désexcitation de l'atome d'hydrogène

a) A quelle valeur de n correspond le niveau fondamental de l'atome d'hydrogène ?

b) Quelle est l'énergie cinétique minimale (exprimée en eV) d'un électron projectile capable de provoquer par choc l'excitation d'un atome d'hydrogène de son niveau fondamental à son deuxième niveau excité ?

c) Sous quelle différence de potentiel minimale V , cet électron projectile, initialement au repos, a-t-il été accéléré ?

d) L'atome d'hydrogène précédemment excité revient à son niveau fondamental avec émission de deux photons. Déterminer les longueurs d'onde de ces deux photons.

IV. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Dans le modèle de l'atome de Bohr l'électron tourne autour du proton en subissant son attraction due à la force électrostatique.

1. Appliquer la loi fondamentale de la dynamique pour trouver la relation vitesse-rayon de trajectoire.

2. Introduire le postulat de quantification du moment cinétique.

3. En déduire la quantification des rayons de trajectoires $r_n = n^2 a_B$ et des vitesses $v_n = v_B/n$ où n est un nombre quantique entier positif et a_B et v_B , des grandeurs que l'on définira. Calculer les valeurs de a_B et v_B .
4. Quelle est la dimension de la grandeur physique $\lambda_B = \frac{h}{mv_B}$ où h est la constante de Planck et m la masse de l'électron. Calculer sa valeur.
5. Définir la longueur d'onde de De Broglie associée à l'électron. Donner son expression en fonction de λ_B pour chaque 'orbite' n . On la notera λ_n .
6. Calculer λ_n/r_n en fonction du rapport λ_B/a_B . Que vaut le rapport λ_B/a_B ? Quelle relation simple entre la circonférence de la trajectoire de l'électron et la longueur d'onde de De Broglie associée, peut-on déduire ?
7. En examinant la variation de ce rapport en fonction de n , que peut-on dire des orbites correspondant à des grands nombres quantiques ? Justifier leur dénomination d'états quasi classiques.
8. Calculer le produit du rayon d'orbite r_n par l'impulsion p_n . Interpréter cette relation.

Constante de Planck $h = 6,62607015 \times 10^{-34}$ J.s

Célérité de la lumière dans le vide $c = 299792458$ m.s⁻¹.

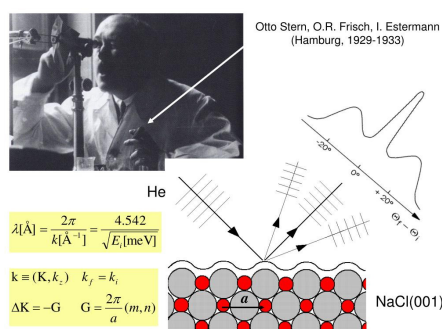
Travaux Dirigés (Texte 2, durée 3h)
I – Science-fiction

Monsieur Martin a une masse de 80 kg, et vit dans un monde imaginaire, Quantumland, où la constante de Planck vaut $h = 100 \text{ J s}$. Il se trouve dans son salon, une pièce carrée de 5m x 5m qui possède deux portes de 70 cm de largeur, situées sur le même mur à une distance de 2m.

1. Calculer la longueur d'onde de Broglie associée à Mr Martin, sachant qu'il se déplace à une vitesse de 1 ms^{-1} .
2. Mr Martin peut-il se reposer dans son fauteuil (celui-ci fait 1m x 1m) ?
3. Quel phénomène subit Mr Martin lorsqu'il franchit une de ses portes pour se rendre dans la pièce voisine ?
4. Pour aller chercher un objet dans la pièce voisine, doit-il laisser une ou les deux portes ouvertes ?
5. Mr Martin a des diamants de 1 carat = $2 \times 10^{-4} \text{ kg}$ dans une boîte cubique de 20 cm de côté. Peut-il contempler ses diamants en ouvrant la boîte ? A quelle vitesse vont-ils jaillir de celle-ci ?
6. Répondre aux mêmes questions pour notre monde dans lequel la constante de Planck vaut $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

II. Ondes d'atomes

En 1931, Stern, Frisch et Estermann (Nobel 1943) ont utilisé un jet d'atomes d'hélium pour bombarder la surface de cristaux de NaCl et LiF ; ce dernier a un paramètre de maille $a = 4,03 \text{ Å}$. La température du jet était de 400 °K .



1. Calculer l'énergie moyenne des atomes ainsi que leur vitesse quadratique moyenne.
2. Calculer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde associée. Pouvaient-ils observer une figure de diffraction ?
3. Quelle doit être l'énergie des électrons donnant la même longueur d'onde ? Quelle serait leur vitesse ? Sont-ils relativistes ? Sous quelle différence de potentiel faut-il les accélérer ?
4. S'il s'agissait de neutrons, quelle serait leur vitesse et énergie ? Pourrait-on utiliser les neutrons thermalisés produits par un réacteur nucléaire ?

III. Mesure de la polarisation d'un photon

Une onde lumineuse plane, monochromatique se dirigeant suivant l'axe Oz et rencontre un analyseur A dont l'axe de transmission est l'axe Ox . L'onde est polarisée linéairement dans le plan Oxy , et on désigne par $\vec{e}_\rho$ la direction de son champ électrique, *c.a.d* sa polarisation. $\theta = (\widehat{\vec{e}_\rho, \vec{e}_x})$ est l'angle entre la polarisation de l'onde et l'axe de l'analyseur. Un détecteur est placé après l'analyseur A.

En physique classique la polarisation de l'onde incidente est bien déterminée dans le sens où sa direction par rapport à l'axe de l'analyseur est fixée par avance. La description classique de cette expérience, valable pour une grande intensité I de l'onde incidente, indique que l'intensité I_t de l'onde transmise par l'analyseur et détectée par le détecteur est donnée par la loi de Malus :

$$I_t = I \cos^2(\theta)$$

A très faible intensité de l'onde incidente, les photons arrivent sur l'analyseur un à un. En physique quantique l'état de polarisation de chaque photon n'est pas déterminé avant la mesure.

1. Quels sont les résultats possibles de mesure réalisés par l'analyseur A et le détecteur D ?
2. Quels sont les états propres de polarisation du photon associés à ces résultats de mesure ?
3. Ecrire l'état de polarisation du photon incident en fonction de ces états propres de polarisation et de l'angle θ . Vérifier qu'il est normé.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir chacun des résultats de mesure.
5. L'interprétation quantique de cette expérience est-elle en accord avec la loi de Malus ?

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

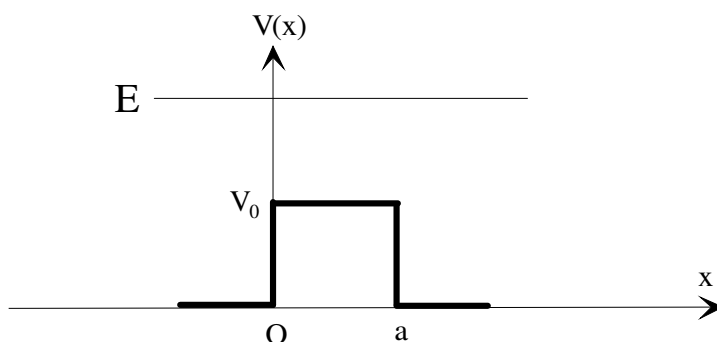
Travaux Dirigés (Texte 3, durée 4h)**I - Barrière de potentiel**

On considère une particule incidente venant de $-\infty$ et qui se présente devant la barrière de potentiel représentée sur la figure ci-dessous. Le but du problème est de rechercher les états stationnaires de la particule correspondant à une énergie $E > V_0$.

1. Ecrire les formes analytiques des fonctions d'onde $\psi(x, t)$ dans toutes les régions de l'espace.
2. Ecrire les équations permettant de déterminer les paramètres d'amplitude introduits à la question précédente. L'énergie est-elle quantifiée ?
3. Représenter graphiquement les variations du coefficient de transmission T en fonction de a , largeur de la barrière. Comparer brièvement les résultats quantiques à ceux que la mécanique classique donnerait pour le même problème. Ecrire la condition de résonance définissant les valeurs de a pour lesquelles T prend une valeur maximale. Quelle est le sens physique de cette condition ? Tracer la courbe de variation de T en fonction du rapport E / V . Conclure.

Effet tunnel

4. On considère à présent $E < V_0$. Ecrire la forme des fonctions d'onde dans chaque région de l'espace. A partir du coefficient de transmission déterminé plus haut, écrire ce même coefficient dans le cas présent.
5. Ecrire enfin ce coefficient T pour une barrière épaisse.

**II - Application à la radioactivité**

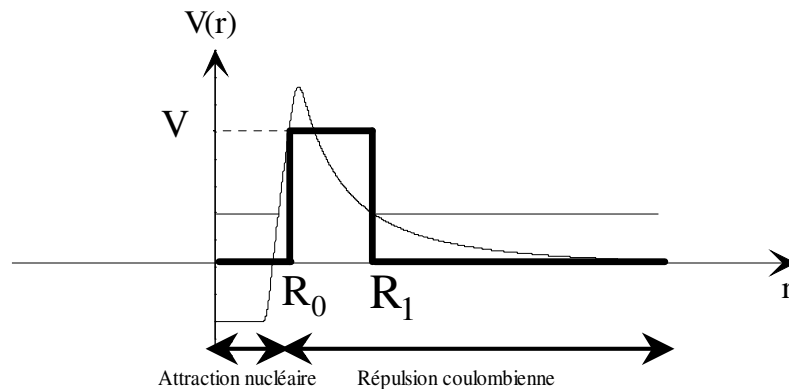
Il s'agit d'établir une théorie de la radioactivité à l'aide d'un modèle simple. Le noyau émetteur crée un potentiel d'interaction selon la figure ci-dessous, où préexiste la particule. Cette dernière, une fois émise (c.à.d quand $r = \infty$, $V = 0$), possède l'énergie cinétique E , égale à l'énergie totale E qu'elle avait dans le puits.

L'énergie potentielle à l'extérieur de ce puits de potentiel est une fonction $V(r)$, potentiel coulombien répulsif. On considère un système unidimensionnel, r étant la distance de la particule au noyau. Ce potentiel est supposé constituer une barrière de potentiel entre R_0 et R_1 . On admettra que la transmission de cette barrière est celle d'une barrière épaisse, et que cette transmission représente la probabilité qu'à la particule de s'échapper du noyau chaque fois qu'elle frappe la paroi du puits de potentiel aux points R_0 .

1. Trouver la loi de probabilité $P(t)dt$ pour que la particule s'échappe du noyau à l'instant t , dans l'intervalle de temps dt .
2. Calculer la durée de vie moyenne du noyau émetteur.

3. Application à la désintégration d'un noyau ${}^{238}_{92}\text{U}$. Calculer la transmission T et la durée de vie moyenne du noyau d'uranium.

Données : $E = 5 \text{ MeV}$, $V = 30 \text{ MeV}$, $m = 6,4 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $R_0 = 1 \times 10^{-14} \text{ m}$, $R_1 = 3 \times 10^{-14} \text{ m}$.



III - Puits de potentiel unidimensionnel infiniment profond

On considère une particule de masse m piégée dans un puits de potentiel unidimensionnel infiniment profond et de largeur L .

1) Ecrire l'équation de Schrödinger permettant de déterminer les fonctions d'ondes des états stationnaires de la particule, que l'on notera $\phi_n(x)$, où n est un entier non nul.

2) Déterminer la forme de la solution générale de cette équation. On pourra poser $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

3) En appliquant les conditions aux limites : $\phi_n(0) = \phi_n(L) = 0$, montrer que les fonctions $\phi_n(x)$ sont de la forme :

$$\phi_n(x) = A \sin(k_n x) \text{ où } A \text{ est une constante.}$$

On donnera l'expression de k_n en fonction de L et n .

4) Déterminer la constante A pour que les fonctions d'ondes $\phi_n(x)$ soient normées.

5) A partir de l'équation de Schrödinger donner l'expression des énergies propres E_n associées aux fonctions $\phi_n(x)$ en fonction de L et n .

6) Montrer que les fonctions $\phi_n(x)$ sont orthogonales, c.a.d qu'elles forment une base dans l'espace de Hilbert.

7) Tracer les trois premières fonctions d'ondes ainsi que les densités de probabilités associées.

8) Calculer les valeurs moyennes des observables position et impulsion dans l'état fondamental ainsi que les valeurs moyennes de leurs carrés. Retrouver le principe d'incertitude de Heisenberg.

Travaux Dirigés (Texte 4, durée 2h)

Notation de Dirac

I. Un électron est piégé dans un puits de potentiel de largeur L et considéré comme infiniment profond. On considère qu'il est dans un état $|\psi\rangle$ combinaison (ou superposition) linéaire de deux états $|n\rangle$ et $|p\rangle$ différents (où n et p sont des nombres entiers non nuls) qui désignent les états propres confinés de l'électron piégé.

1. Exprimer, en notation de Dirac, le fait que les états propres de l'électron forment une base orthonormée.
2. Ecrire la combinaison linéaire $|\psi\rangle$ à deux états, dans le cas d'une superposition quelconque. Ecrire la condition de normalisation de cet état.
3. Quelle est la probabilité de trouver l'électron dans l'état $|n\rangle$ ou dans l'état $|p\rangle$? Cas d'une superposition équiprobable ?
4. Dans le cas d'une superposition équiprobable, quels sont les états normés possibles. Montrer qu'ils diffèrent par un facteur de phase.
5. On effectue une mesure de l'énergie dans l'état $|\psi\rangle$. Indiquer les résultats de cette mesure et les probabilités associées.
6. Quelle est la valeur moyenne des résultats obtenus ainsi que l'écart type à cette valeur moyenne.
7. Dans le cas d'une superposition équiprobable des états $|1\rangle$ et $|2\rangle$, écrire la fonction d'onde représentant (dans l'espace et dans le temps) l'amplitude de probabilité de présence de $|\psi\rangle$. Est-ce un état stationnaire ?

II. On considère l'opérateur $\hat{A}$ agissant dans l'espace de Hilbert des états à deux dimensions, représentés par la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

$$\hat{A} = -i\sqrt{3}|2 \times 1| + i\sqrt{3}|1 \times 2| + 2|2 \times 2|$$

- 1- Rappeler les propriétés de la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.
- 2- Déterminer l'action de $\hat{A}$ sur les états de la base. Est-ce une base d'états propres de $\hat{A}$?
- 3- Ecrire la matrice représentative de $\hat{A}$. $\hat{A}$ est-il hermitien ? Conclusion.
- 4- Déterminer les valeurs propres.
- 5- Déterminer les états propres (normés à 1).

Travaux Dirigés (Texte 5, durée 3h)

Molécule diatomique

On se propose d'étudier les états et les énergies propres d'une molécule diatomique du type HBr. Le hamiltonien décrivant le mouvement relatif des atomes d'hydrogène et de brome est donné par :

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r),$$

où μ est la masse réduite des deux atomes et $V(r)$ leur potentiel d'interaction :

$$V(r) = -2D \left(\frac{a}{r} - \frac{a^2}{2r^2} \right).$$

1. Tracer et interpréter les deux termes qui apparaissent dans le potentiel d'interaction.

On définit le potentiel effectif qui tient compte de l'énergie cinétique de rotation :

$$V_{eff}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r).$$

2. Trouver la distance d'équilibre r_{eq} entre les deux atomes ainsi que l'énergie potentielle d'interaction autour de r_{eq} .

3. Estimer cette distance en utilisant $a = 1,4 \text{ \AA}$ et $D = 2,5 \text{ eV}$. On assimilera la masse réduite de la molécule à celle du proton. Justifier cette approximation.

4. En utilisant un développement limité à l'ordre 2 trouver l'expression de $V_{eff}(r)$ autour de r_{eq} . Tracer $V_{eff}(r)$. Interpréter.

5. Montrer que $V_{eff}(r)$ se met sous la forme :

$$V_{eff}(r) = -D + \hbar\omega_r l(l+1) + \frac{1}{2}\mu\omega_v^2(r-a)^2$$

Donner les expressions de ω_r et ω_v en fonction de μ , D et a .

6. Calculer $\hbar\omega_r$ et $\hbar\omega_v$ en eV. En déduire les énergies quantifiées de la molécule. Discuter le couplage entre degrés de liberté de rotation et de vibration.

7. Proposer un diagramme d'énergie montrant les niveaux vibrationnels et rotationnels.

8. La molécule est dans l'état roto-vibrationnel $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1,-1,1\rangle + i|2,0,3\rangle]$, où les deux premiers nombres désignent les nombres quantiques azimutaux l et m et le dernier le nombre quantique vibrationnel. Quels sont les résultats possibles de mesure de l'énergie ainsi que les probabilités associées ?

9. Quels sont les résultats possibles de mesures du moment cinétique et de sa projection sur l'axe Oz ?