UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

STME : mention PHYSIQUE
M1 Parcours Sciences Physiques et Chimiques
2M8PC1M / Ondes et vibrations

année 2006/2007

ONDES ET VIBRATIONS

Examen Juin 2007

Tout document interdit – Durée 2 heures

I. Donner un exemple d'oscillations non-linéaires, et définir la notion de non-linéarité.

II. On considère un pendule de masse m suspendu à une tige de longueur l.

   a. Donner l'expression de l'énergie potentielle V et de l'énergie cinétique T. Représenter l'énergie potentielle en fonction de l'angle ϕ.

   b. Donner l'expression de la fonction de Lagrange et en déduire l'équation de mouvement.

   c. Tracer dans l'espace de phases ($\phi, \dot{\phi}$) les trajectoires qui correspondent aux conditions initiales suivantes :

      i. $\phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 3\sqrt{g/l}$,

      ii. $\phi(0) = \pi/2, \quad \dot{\phi}(0) = 0$.

III. L'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique forcé et amorti est donné par :

$$\ddot{x} + 2\eta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

dans laquelle $F(t)$ est une fonction oscillatoire de pulsation ω.

   a. En variant ω, on observe une amplitude maximale pour une fréquence $\omega_{res} = 0{,}85\ \omega_0$. Déterminer le terme d'amortissement, et donner sa valeur numérique ainsi que sa dimension physique.

   b. De quel type d'amortissement s'agit-il ? En considérant $F = 0$, ainsi que les conditions initiales $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$, tracer sa trajectoire dans l'espace des phases.

IV. On considère le système de la figure ci-contre, constitué d'une masse M qui se déplace horizontalement et sans frottement, d'un cylindre homogène de rayon R, de même masse M et dont l'axe de rotation O est fixe (le moment d'inertie autour de l'axe O est $J = \frac{1}{2} MR^2$). Les deux masses sont liées par des ressorts de raideur k. A l'équilibre, la masse M se trouve à la position x_0, et le point fixation A du ressort $\tilde{k} = 4k$ se trouve selon la verticale de l'axe du cylindre O. La distance OA vaut $R/2$. Une force F est –en outre- appliquée à la masse M. On notera ξ le déplacement de cette masse hors de sa position d'équilibre, et θ la rotation du cylindre par rapport à sa position d'équilibre.

   a. Quel est la dimensionalité du problème ?

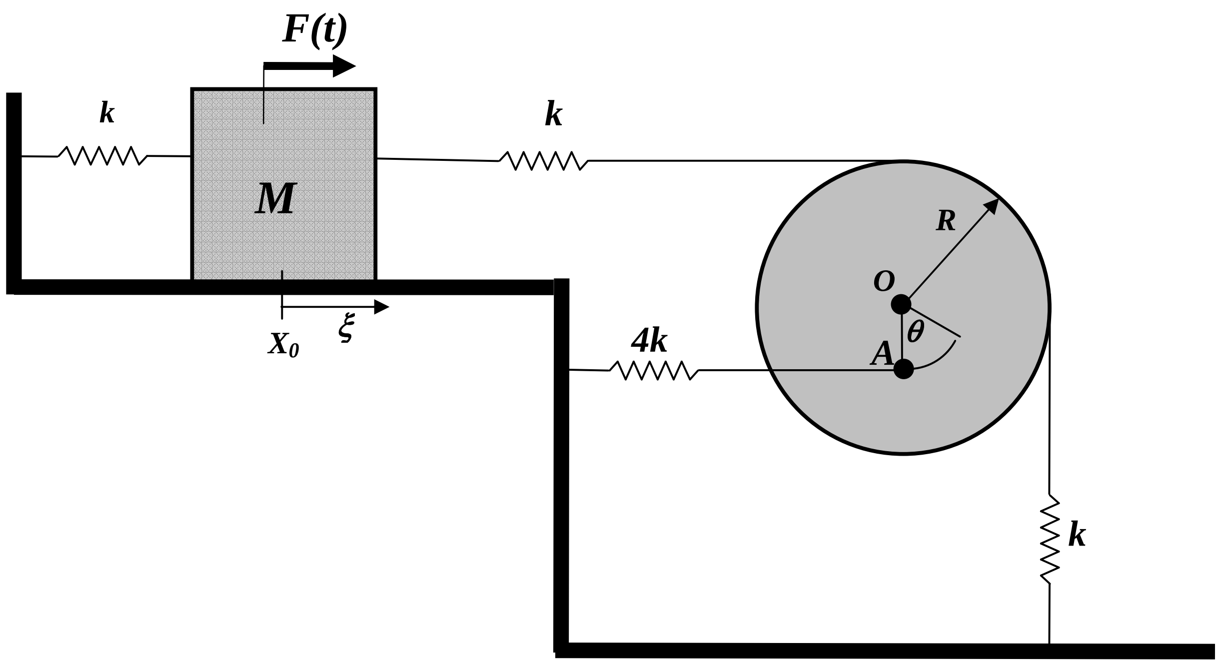
   b. Exprimer les énergies cinétique et potentielle, ainsi que le Lagrangien du système en fonction de ξ et de θ.

c. Ecrire les équations de Lagrange, et en déduire les équations du mouvement de la masse ***M*** et du cylindre.

d. On pose pour tout ce qui suit $\omega_0 = [k / M]^{1/2}$. En supposant d'abord que $F = 0$, quelles sont les pulsations propres ω' et ω'' du système ? Quel est le rapport des amplitudes du mouvement des deux masses pour ces pulsations ω' et ω'' ?

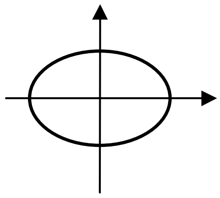
e. On suppose maintenant que la force s'écrit $F(t) = F_0\ exp\ (i\Omega\ t)$, et que les solutions sont –de fait- de la forme $\xi = \xi_0\ exp\ (i\Omega\, t)$ et $\theta = \theta_0\ exp\ (i\Omega\, t)$ en régime permanent. Calculer les amplitudes ξ_0 et θ_0 en fonction de la pulsation excitatrice Ω.

f. Tracer schématiquement $|\xi_0|^2$ et $|\theta_0|^2$ en fonction de la pulsation excitatrice Ω. Interpréter en particulier les cas $\Omega = \omega'$ et $\Omega = \omega''$. Pour quelle fréquence excitatrice la masse M reste immobile ? Expliquer.

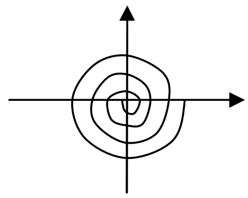


Soultion/Barème

I. a)



conservatif :
courbe dans l'espace
de phases fermé [1]



dissipatif :
(x=0,v=0) est
attracteur : toutes les
trajectoires tendent vers
(0,0) [1]

b) oscillations non-linéaires : solution oscillatoire, mais pas sinusidoïal,
pas de principe de superposition [1]
ex : oscillateur de van der Pol, pendule pour des grandes amplitudes, etc... [1]

II. a) $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ [0.5],

$V = \frac{1}{2} kx^2 + mgx\cos\theta$ [0.5]

$m\ddot{x} + kx + mg\cos\theta = 0$ [0.5]

b) $T = \frac{1}{2} m_1 x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 x_2^2 + \frac{1}{2} m_3 x_3^2 + \frac{1}{2} m_4 x_4^2$ [0.5]

$V = \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_3)^2$ [1]

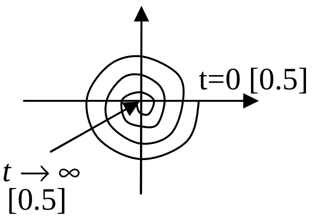
équations de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 1-3$

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 - kx_4 = 0 \\
&m_2\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 - kx_4 = 0 \\
&m_3\ddot{x}_3 + kx_3 - kx_4 = 0 \\
&m_4\ddot{x}_4 + 3kx_4 - kx_1 - kx_2 - kx_3 = 0
\end{aligned}$$ [1]

III. a) $|x_0| = \left|\frac{F_0}{m}\right| \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega_0^2\omega^2}}$ [1]

maximum pour : $\frac{d|x_0|}{d\omega} = 0 \longrightarrow \eta = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2}} < 1$ [1]

b) amortissement sous-critique



IV. a) $T = \frac{1}{2} M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}\right)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$ condition de roulement sans glissement : $x_2 = R\theta \quad \dot{x}_2 = R\dot{\theta}$

moment d'inertie : $J = \frac{1}{2} mR^2$

$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\right)\dot{x}_2^2 \qquad [1]$$

$$V = \frac{3}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 \qquad [1]$$

b)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \to M\ddot{x}_1 + 4kx_1 = F + kx_2 \to \ddot{x}_1 + 4\omega_0^2 x_1 = \frac{F}{M} + \omega_0^2 x_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \to \frac{M}{2}\ddot{x}_2 + kx_2 = kx_1 \to \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_2 = 2\omega_0^2 x_2$$

[1]

c) fréquences propres : F=0,

$$\begin{pmatrix} 4\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 4\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \to \omega' = \omega_0\sqrt{3+\sqrt{3}}, \quad \omega'' = \omega_0\sqrt{3+\sqrt{3}} \quad [1]$$

pour w' : $\begin{pmatrix} 4\omega_0^2 - \omega_0^2(3+\sqrt{3}) & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega_0^2(3+\sqrt{3}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0 \to \quad X_2 = (1-\sqrt{3})X_1$ sens opp. [0.5]

pour w'' : $\begin{pmatrix} 4\omega_0^2 - \omega_0^2(3-\sqrt{3}) & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega_0^2(3-\sqrt{3}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0 \to \quad X_2 = (1+\sqrt{3})X_1$ même sens [0.5] d)

$$i.\quad (4\omega_0^2 - \Omega^2)X_1 - \omega_0^2 X_2 = \frac{F}{M}$$

$$ii.\quad (2\omega_0^2 - \Omega^2)X_2 - \omega_0^2 X_1 = 0$$

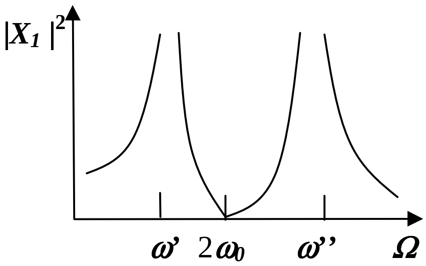
avec (ii) on a : $X_1 = \dfrac{(2\omega_0^2 - \Omega^2)}{\omega_0^2}$, dans ($i$)

$$\left[(4\omega_0^2 - \Omega^2)(2\omega_0^2 - \Omega^2) - \omega_0^2\right]X_2 = \frac{F_0\omega_0^2}{M}$$

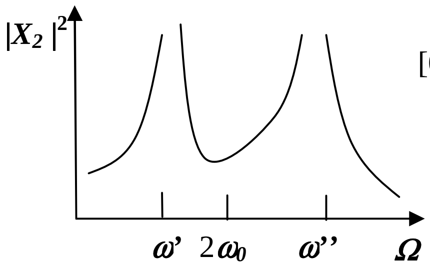
$$X_2 = \frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2}{\left[(4\omega_0^2 - \Omega^2)(2\omega_0^2 - \Omega^2) - \omega_0^2\right]}$$ [2]

$$X_1 = \frac{F_0}{M}\frac{(2\omega_0^2 - \Omega^2)}{\left[(4\omega_0^2 - \Omega^2)(2\omega_0^2 - \Omega^2) - \omega_0^2\right]}$$

e)



[0.5]



[0.5]

pour $\Omega=\omega'$ et $\Omega=\omega''$: $|X_1|^2$ et $|X_2|^2$ tendent vers l'infini : **résonance** [1]

pour $\Omega=2\omega_0$, on a $|X_1|^2$ **=0 : antirésonance :** la force exercé par ***m*** contrebalance la force externe [1]