UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

STME : mention PHYSIQUE
M1 Parcours Sciences Physiques et Chimiques
2M8PC1M / Ondes et vibrations

année 2005/2006

EXAMEN « ONDES ET VIBRATIONS » - SESSION JUIN 2006

Tout document interdit – Durée 2 heures

Exercice I

En termes généraux, donner les caractéristiques communes ainsi que les différences entre oscillations linéaires et non-linéaires, et donner un exemple pour chacun des deux cas.

Exercice II

A l'aide des équations de Lagrange, établir les équations de mouvement du système représenté figure I, avec x_1, x_2, et x_3 désignant les déplacements des masses m_1, m_2, m_3 hors de leurs positions d'équilibre, et F_1, F_2 *et* F_3 les forces extérieures appliquées.

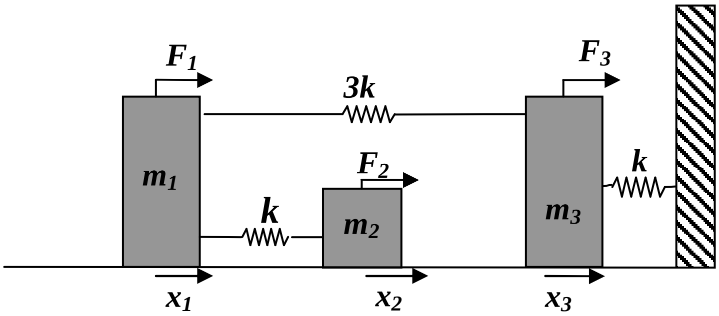

Figure I

Exercice III

On considère un cylindre massif de rayon R et de masse m, qui roule sans glissement sur une surface lisse auquel sont attachés deux ressorts de raideur k, à une distance a du centre, et un dispositif d'amortissement avec coefficient c, attaché au centre (voir figure II). On considère des déplacements de petites amplitudes hors de la position d'équilibre du cylindre et dont le moment d'inertie vaut $J = \frac{1}{2} m R^2$.

a) En considérant le déplacement horizontal du centre de masse du cylindre comme une coordonnée généralisée x, donner l'expression des énergies cinétique, potentielle et dissipative. Donner la fonction de Lagrange pour ce système.

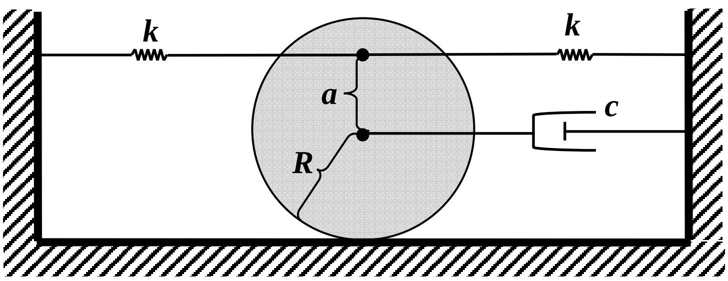

Figure II

b) A partir des équations de Lagrange, déterminer l'équation du mouvement du cylindre, incluant l'amortissement.

T.S.V.P.

c) Dans l'approximation des petits angles, déterminer la fréquence propre ainsi que l'amortissement relatif η en fonction de a, R, m, c et k.

d) Pour quelle valeur de a, le système est-il au point critique ? On appellera cette valeur a_c.
e) Pour $a > a_c$, de quel type d'amortissement s'agit-il ? Avec des conditions initiales x (t = 0) = 0 et $\dot{x}$ (t = 0) = v_0, donner l'allure de la trajectoire dans l'espace de phases (x, $\dot{x}$).

Exercice IV

On considère un système de deux masses M et m, se déplaçant horizontalement, *sans frottement*, et liées par deux ressorts de raideur k. Leurs déplacements, hors position d'équilibre, sont donnés par x_1 et x_2. Une force F agit sur la masse M (voir figure III).

a) Ecrire les équations de Lagrange, et en déduire les équations du mouvement pour x_1 et x_2.
b) En supposant $F = 0$, quelles sont les fréquences propres ω' et ω'' du système ?

c) On suppose une force de la forme $F = F_0\, e^{i\,\Omega t}$, et donc des solutions de la forme $x_1 = X_1\, e^{i\,\Omega t}$ et $x_2 = X_2\, e^{i\,\Omega t}$ dans le régime stationnaire. Calculer les amplitudes X_1 et X_2 en fonction de la fréquence excitatrice Ω. On posera $\omega_1 = \sqrt{2k/m}$ et $\omega_2 = \sqrt{k/m}$.

d) Tracer schématiquement $|X_1|$ et $|X_2|$ en fonction de la fréquence excitatrice Ω. Calculer $|X_1|$ et $|X_2|$ – en particulier- pour $\Omega = \omega'$, ω'' et ω_2, et interpréter les résultats. Expliquer le fait que pour une certaine valeur de la fréquence excitatrice, la masse M reste immobile malgré la force appliquée.

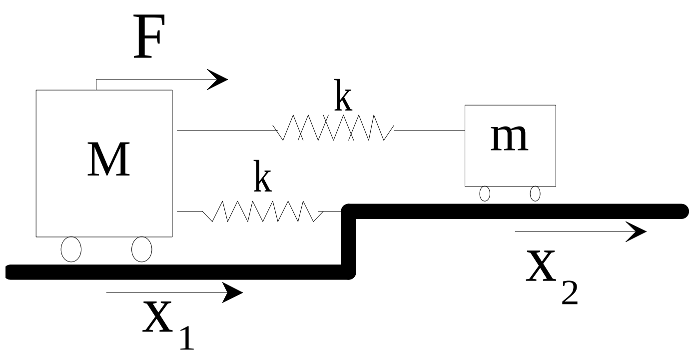

Figure III