UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

STME : mention PHYSIQUE
M1 Parcours Sciences Physiques et Chimiques
2M8PC1M / Ondes et vibrations

année 2004/2005

ONDES ET VIBRATIONS

Examen Juin 2005

Tout document interdit – Durée 2 heures

I. a) Characteriser la dynamique de systèmes conservatifs et dissipatifs à l'aide de leur trajectoire dans l'espace de phases.

b) Donner un exemple d'oscillations non-linéaires et définir la notion de non-linéarité.

II. Etablir les équations de mouvement pour les deux systèmes suivants (Figures II(a) et II(b)). Dans les deux cas, les masses se déplacent sans frottement.

Figure II(a)

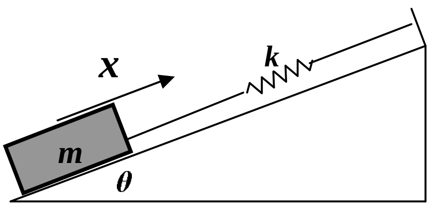
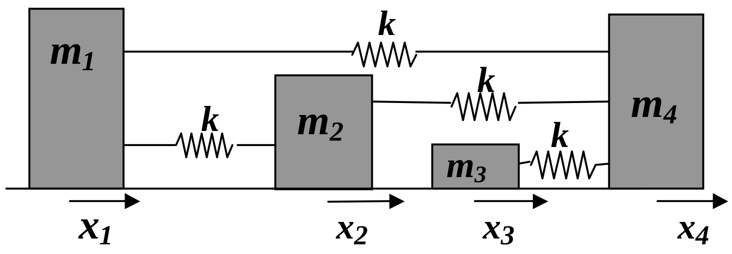


Figure II(b)



III. a) L'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique forcé amorti est donné par :

$$\ddot{x} + 2\eta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

où $F(t)$ est une fonction oscillatoire de fréquence $\boldsymbol{\omega}$. En fonction de ω, on observe une amplitude maximale pour une fréquence $\boldsymbol{\omega_{res}}=0.7\ \boldsymbol{\omega_0}$. Déterminer le terme d'amortissement.

b) De quel type d'amortissement s'agit-il ? En considérant $\boldsymbol{F=0}$, et les conditions initiales $\boldsymbol{x(t=0)=x_0}$ et $\dot{x}(t=0)$, tracer sa trajectoire dans l'espace de phases.

TSVP

IV. On considère le système de la Figure IV, constitué d'une masse $\boldsymbol{M}$ se déplacant horizontalement sans frottement et d'un cylindre homogène de rayon $\boldsymbol{R}$ et de masse $\boldsymbol{m=M/3}$ roulant sans glisser (le moment d'inertie autour de son axe $\boldsymbol{O}$ est $\boldsymbol{J}=1/2\ \boldsymbol{m}\ \boldsymbol{R}^2$), liés par des ressorts de raideur $\boldsymbol{k}$. Le déplacement de la masse $\boldsymbol{M}$ et le déplacement horizontal de l'axe $\boldsymbol{O}$ du cylindre par rapport à leurs positions d'équilibre respectives sont donnés par x_1 et x_2. La force $\boldsymbol{F}$ est appliquée à la masse $\boldsymbol{M}$.

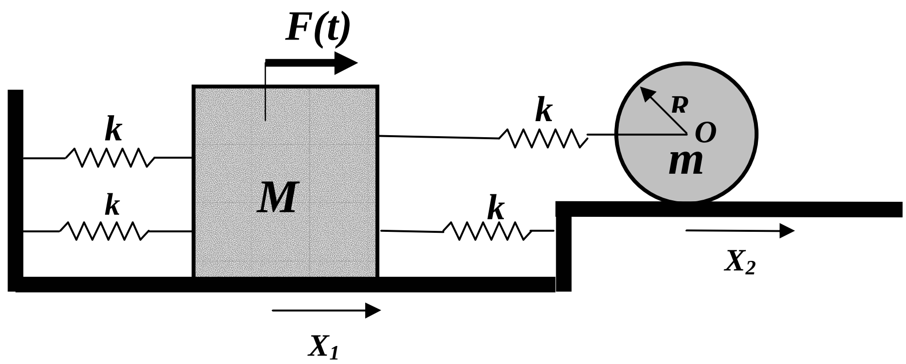
a) Exprimer les énergies cinétique et potentielle et le Lagrangien du système.

b) Ecrire les équations de Lagrange et en déduire les équations de mouvement de $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{m}$.

c) On pose dans tout ce qui suit : $\omega_0=[k/M]^{1/2}$. En supposant d'abord que $F=0$, quelles sont les pulsations propres ω' et ω'' du système ? Quel est le rapport des amplitudes du mouvement des deux masses pour ces pulsations ω' et ω'' ?

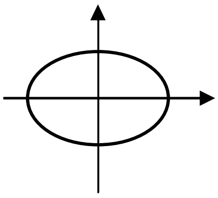
d) Dans la suite, on suppose que la force s'écrit $F=F_0\ exp(i\ \Omega t)$, avec des solutions de la forme $x_1=X_1\ exp(i\ \Omega t)$ et $x_2=X_2\ exp(i\ \Omega t)$ dans le régime permanent. Calculer les amplitudes X_1 et X_2 en fonction de la pulsation excitatrice Ω.

e) Tracer schématiquement $|X_1|^2$ et $|X_2|^2$ en fonction de la pulsation excitatrice Ω.. En particulier, interpreter les cas $\Omega=\omega'$, $\Omega=\omega''$ et $\Omega=2\omega_0$.

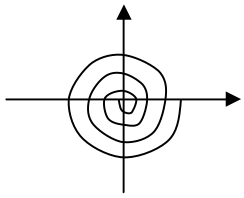


Soultion/Barème

I. a)



conservatif :
courbe dans l'espace de phases fermé [1]



dissipatif :
(x=0,v=0) est attracteur : toutes les trajectoires tendent vers (0,0) [1]

b) oscillations non-linéaires : solution oscillatoire, mais pas sinusidoïal, pas de principe de superposition [1]
ex : oscillateur de van der Pol, pendule pour des grandes amplitudes, etc... [1]

II. a) $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ [0.5],

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + mgx\cos\theta \qquad [0.5]$$

$$m\ddot{x} + kx + mg\cos\theta = 0 \qquad [0.5]$$

b) $T = \frac{1}{2} m_1 x_1^2 + \frac{1}{2} m_2 x_2^2 + \frac{1}{2} m_3 x_3^2 + \frac{1}{2} m_4 x_4^2$ [0.5]

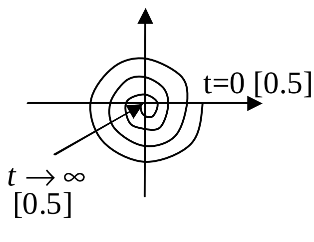
$$V = \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_3)^2 \qquad [1]$$

équations de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 1-3$

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 - kx_4 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 - kx_4 &= 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + kx_3 - kx_4 &= 0 \\ m_4\ddot{x}_4 + 3kx_4 - kx_1 - kx_2 - kx_3 &= 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

III. a) $|x_0| = \left|\frac{F_0}{m}\right| \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega_0^2\omega^2}}$ [1]

maximum pour : $\frac{d|x_0|}{d\omega} = 0 \longrightarrow \eta = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2}} < 1$ [1]



b) amortissement sous-critique

IV. a) $T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}\right)\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ condition de roulement sans glissement : $x_2=R\theta \quad \dot{x}_2=R\dot{\theta}$

moment d'inertie : $J=\frac{1}{2}mR^2$

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\right)\dot{x}_2^2 \qquad [1]$$

$$V=\frac{3}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 \qquad [1]$$

b)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)=0\rightarrow M\ddot{x}_1+4kx_1=F+kx_2\rightarrow \ddot{x}_1+4\omega_0^2x_1=\frac{F}{M}+\omega_0^2x_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0\rightarrow \frac{M}{2}\ddot{x}_2+kx_2=kx_1\rightarrow \ddot{x}_1+2\omega_0^2x_2=2\omega_0^2x_2$$

[1]

c) fréquences propres : F=0,

$$\begin{pmatrix}4\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2\\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=0$$

$$\det\begin{pmatrix}4\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2\\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2\end{pmatrix}=0\rightarrow \omega'=\omega_0\sqrt{3+\sqrt{3}},\quad \omega''=\omega_0\sqrt{3+\sqrt{3}} \quad [1]$$

pour w' : $\begin{pmatrix}4\omega_0^2-\omega_0^2(3+\sqrt{3}) & -\omega_0^2\\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega_0^2(3+\sqrt{3})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=0\rightarrow \quad X_2=(1-\sqrt{3})X_1$ sens opp. [0.5]

pour w'' : $\begin{pmatrix}4\omega_0^2-\omega_0^2(3-\sqrt{3}) & -\omega_0^2\\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega_0^2(3-\sqrt{3})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=0\rightarrow \quad X_2=(1+\sqrt{3})X_1$ même sens [0.5]

d) *i.* $(4\omega_0^2-\Omega^2)X_1-\omega_0^2X_2=\frac{F}{M}$

ii. $(2\omega_0^2-\Omega^2)X_2-\omega_0^2X_1=0$

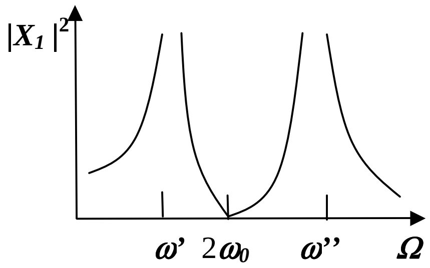
avec (*ii*) on a : $X_1=\frac{(2\omega_0^2-\Omega^2)}{\omega_0^2}$, dans (*i*)

$$\left[(4\omega_0^2-\Omega^2)(2\omega_0^2-\Omega^2)-\omega_0^2\right]X_2=\frac{F_0\omega_0^2}{M}$$

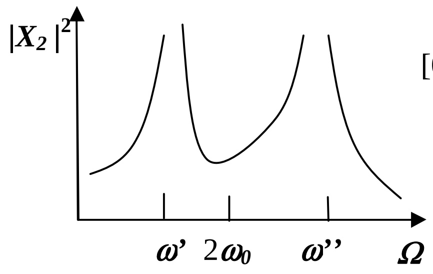
$$X_2=\frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2}{\left[(4\omega_0^2-\Omega^2)(2\omega_0^2-\Omega^2)-\omega_0^2\right]} \qquad [2]$$

$$X_1=\frac{F_0}{M}\frac{(2\omega_0^2-\Omega^2)}{\left[(4\omega_0^2-\Omega^2)(2\omega_0^2-\Omega^2)-\omega_0^2\right]}$$

e)



[0.5]



[0.5]

pour $\Omega=\omega'$ et $\Omega=\omega''$: $|X_1|^2$ et $|X_2|^2$ tendent vers l'infini : **résonance** [1]
pour $\Omega=2\omega_0$, on a $|X_1|^2=0$ **: antirésonance :** la force exercé par m contrebalance la force externe [1]