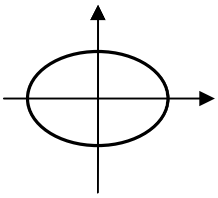
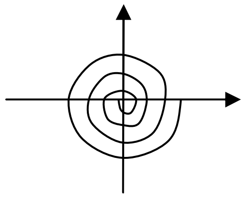
Solution/Barème

I. a)



conservatif :
courbe dans l'espace
de phases fermé [1]



dissipatif :
(x=0,v=0) est
attracteur : toutes les
trajectoires tendent vers
(0,0) [1]

b) oscillations non-linéaires : solution oscillatoire, mais pas sinusoïdal,
pas de principe de superposition [1]
ex : oscillateur de van der Pol, pendule pour des grandes amplitudes, etc... [1]

II. a) $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ [0.5],

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + mgx\cos\theta \qquad [0.5]$$

$$m\ddot{x} + kx + mg\cos\theta = 0 \qquad [0.5]$$

b) $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{x}_4^2$ [0.5]

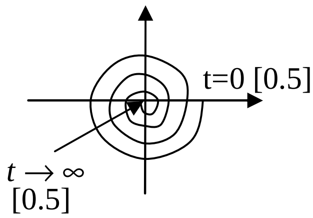
$$V = \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k(x_4 - x_3)^2 \quad [1]$$

équations de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = 0, \quad i = 1-3$

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 - kx_4 &= 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 - kx_4 &= 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + kx_3 - kx_4 &= 0 \\ m_4\ddot{x}_4 + 3kx_4 - kx_1 - kx_2 - kx_3 &= 0 \end{aligned} \qquad [1]$$

III. a) $|x_0| = \left|\frac{F_0}{m}\right| \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega_0^2\omega^2}}$ [1]

maximum pour : $\frac{d|x_0|}{d\omega} = 0 \longrightarrow \eta = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega_0^2}} < 1$ [1]



b) amortissement sous-critique

IV. a) $T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}\right)\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ condition de roulement sans glissement : $x_2=R\theta \quad \dot{x}_2=R\dot{\theta}$

moment d'inertie : $J=\frac{1}{2}mR^2$

$T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\right)\dot{x}_2^2$ [1]

$V=\frac{3}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$ [1]

b)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)=0\rightarrow M\ddot{x}_1+4kx_1=F+kx_2\rightarrow \ddot{x}_1+4\omega_0^2x_1=\frac{F}{M}+\omega_0^2x_2$$

[1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)=0\rightarrow \frac{M}{2}\ddot{x}_2+kx_2=kx_1\rightarrow \ddot{x}_1+2\omega_0^2x_2=2\omega_0^2x_2$$

c) fréquences propres : F=0,

$$\begin{pmatrix}4\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2\\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=0$$

$$\det\begin{pmatrix}4\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2\\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2\end{pmatrix}=0\rightarrow \omega'=\omega_0\sqrt{3+\sqrt{3}},\quad \omega''=\omega_0\sqrt{3+\sqrt{3}}\quad [1]$$

pour w' : $\begin{pmatrix}4\omega_0^2-\omega_0^2(3+\sqrt{3}) & -\omega_0^2\\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega_0^2(3+\sqrt{3})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=0\rightarrow \quad X_2=(1-\sqrt{3})X_1$ sens opp. [0.5]

pour w'' : $\begin{pmatrix}4\omega_0^2-\omega_0^2(3-\sqrt{3}) & -\omega_0^2\\ -2\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega_0^2(3-\sqrt{3})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=0\rightarrow \quad X_2=(1+\sqrt{3})X_1$ même sens [0.5]

d)

i. $(4\omega_0^2-\Omega^2)X_1-\omega_0^2X_2=\frac{F}{M}$

ii. $(2\omega_0^2-\Omega^2)X_2-\omega_0^2X_1=0$

avec (*ii*) on a : $X_1=\frac{(2\omega_0^2-\Omega^2)}{\omega_0^2}$, dans (*i*)

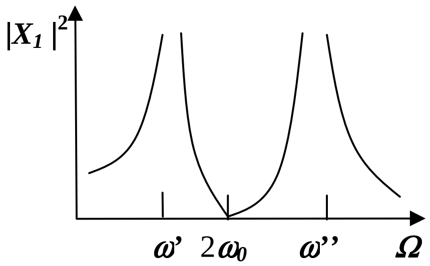
$$\left[(4\omega_0^2-\Omega^2)(2\omega_0^2-\Omega^2)-\omega_0^2\right]X_2=\frac{F_0\omega_0^2}{M}$$

$$X_2=\frac{F_0}{M}\frac{\omega_0^2}{\left[(4\omega_0^2-\Omega^2)(2\omega_0^2-\Omega^2)-\omega_0^2\right]}$$

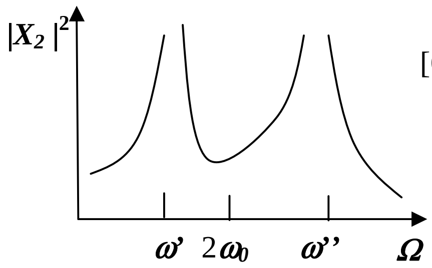
[2]

$$X_1=\frac{F_0}{M}\frac{(2\omega_0^2-\Omega^2)}{\left[(4\omega_0^2-\Omega^2)(2\omega_0^2-\Omega^2)-\omega_0^2\right]}$$

e)



[0.5]



[0.5]

pour $\Omega=\omega'$ et $\Omega=\omega''$: $|X_1|^2$ et $|X_2|^2$ tendent vers l'infini : **résonance** [1]
pour $\Omega=2\omega_0$, on a $|X_1|^2 = 0$ **: antirésonance :** la force exercé par m contrebalance la force externe [1]