

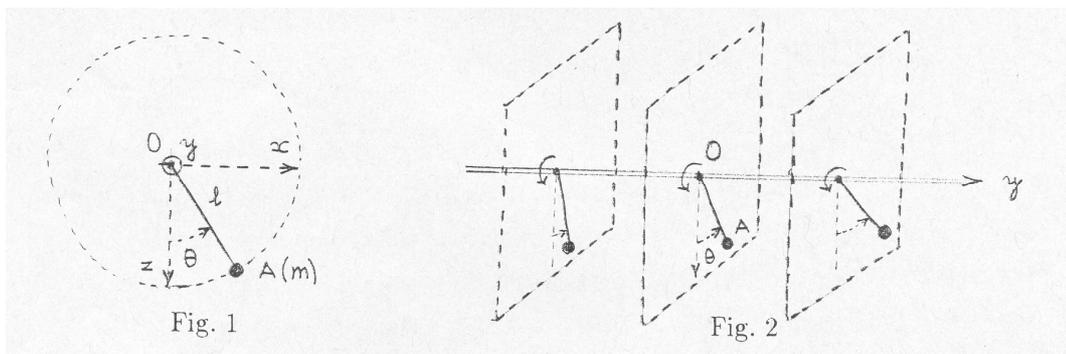
Travaux Dirigés Ondes et Vibrations Texte 4

PENDULES SIMPLES ET SOLITONS

On considère un pendule simple OA , de masse $m = 0,02 \text{ kg}$ et de longueur $l = 0,1 \text{ m}$, dans le champ de pesanteur terrestre $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_x$, avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, \mathbf{e}_x étant la verticale descendante.

1.
 - a. Exprimer, en fonction de l'angle θ que fait OA avec \mathbf{e}_x , ou de ses dérivées par rapport au temps, l'énergie cinétique ε_k du pendule, ainsi que son énergie potentielle de pesanteur ε_p , l'origine de cette dernière étant prise pour $\theta = \pi/2$.
 - b. Représenter graphiquement la fonction $\varepsilon_p(\theta)$. Discuter qualitativement la nature du mouvement pour différentes valeurs de l'énergie mécanique comparées à l'énergie mgl .
 - c. Sachant que l'on néglige l'influence des forces de frottement, établir, à l'aide du théorème de l'énergie mécanique, l'équation différentielle à laquelle satisfait le mouvement. En déduire, l'équation différentielle du deuxième ordre correspondante. Que devient cette équation dans le cas des petits mouvements, définis par $\sin \theta \approx \theta$?
 - d. Calculer la pulsation propre ω_0 des petites oscillations du pendule simple, ainsi que la période propre correspondante. Quelle est l'influence de la valeur de la masse ? Commenter.
2. Le long d'une corde métallique horizontale Ox , on suspend, à intervalles réguliers, N pendules, identiques au précédent (Fig. 1). Chacun des pendules transmet à la corde un angle de torsion égal à l'angle θ qu'il fait avec la verticale. L'analyse montre que θ satisfait à l'équation différentielle suivante, notée ESG (Equation Sine-Gordon) :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = k_0^2 \sin(\theta) \text{ avec } k_0^2 = \frac{\omega_0^2}{v_0^2}.$$



- a. Montrer que ESG se réduit à son premier membre en l'absence de pendules. Quelle est alors la signification physique de l'équation ? En unité SI , $v_0 = 0,6$; de quelle unité s'agit-il ? Commenter cette valeur en rappelant l'ordre de grandeur de la vitesse de propagation des ondes acoustiques le long d'une corde métallique. Calculer k_0 en précisant son unité SI .
- b. Que devient ESG pour $\theta \ll 1$? Vérifier que l'équation complexe associée à ESG admet alors une solution d'expression :

$$\underline{\theta} = \theta_m \exp[-i(\omega t - kx)]$$

Quelle est la signification physique de cette solution ? A quelle relation, dite de dispersion, doivent satisfaire ω et k . Préciser la nature du graphe donnant ω / ω_0 en fonction de k / k_0 .

- c. La solution exacte (réelle au sens mathématique) de ESG est :

$$\tan\left[\frac{\theta(s)}{4}\right] = \exp(\pm \gamma s) \text{ avec } s = \omega_0 \left(t - \frac{x}{v}\right) \text{ et } \gamma = \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^{-1/2}$$

On appelle soliton le phénomène physique que décrit une telle solution. Le signe plus dans l'argument de l'exponentielle correspond à un soliton de torsion, le signe moins à un soliton d'antitortion. Donner la signification physique de v , ainsi que sa valeur limite.