(1) $Mg^{11+} \Rightarrow Z = 12$ $\quad E_n = -13{,}6 \cdot \frac{Z^2}{n^2}$ (eV)

$n = 2 \rightarrow n = 1 \Rightarrow h\nu = 13{,}6 \cdot (12)^2 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right)$

$h\nu = 1468{,}8\,eV \rightarrow \lambda \sim \frac{12400}{1468{,}8} \sim 8{,}44\,Å$ $(0{,}84\,nm)$

(2) (a). $n = 2$, $\ell = 1$ $(2p)$ a une structure fine dûe à l'interaction spin-orbite $j = \frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ transition $2p \rightarrow 1s$ est en réalité un doublet $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ et $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$

(b) avec $\hat{H}_{SO} = a \cdot \hat{\ell} \cdot \hat{s}$ et $\hat{j} = \hat{\ell} + \hat{s}$ on peut écrire :

$\hat{H}_{SO} = \frac{a}{2}\left(\hat{j}^2 - \hat{\ell}^2 - \hat{s}^2\right)$ opérateur diagonal dans la base

$|n, \ell, s, j, m_j\rangle$ avec les valeurs propres :

$$\Delta E_{SO} = \langle n, \ell, s, j, m_j | H_{SO} | n, \ell, s, j, m_j\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)\right]$$

soit ici : $\Delta E_{SO}\left(j = \frac{1}{2}\right) = \frac{a\hbar^2}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - (1 \times 2) - \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\right] = -a\hbar^2$

$\Delta E_{SO}\left(j = \frac{3}{2}\right) = \frac{a\hbar^2}{2}\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2 - \frac{3}{4}\right] = +\frac{a\hbar^2}{2}$

écart entre les composantes $= \frac{3}{2}a\hbar^2$

expérimentalement $\Delta\lambda = 6 \cdot 10^{-4}\,nm$ et $E = \frac{hc}{\lambda}$

soit $|\Delta E_{exp}| = \frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{(8{,}44 \cdot 10^{-10})^2} \times 6 \cdot 10^{-13}$

$\Delta E_{exp} = 1{,}673\;10^{-19}\,J \approx 1{,}05\,eV$

$\frac{3}{2}a\hbar^2 = 1{,}05\,eV \Rightarrow a\hbar^2 \approx 0{,}7\,eV$

(3). (a) : pour avoir $\mu_B B \approx 0{,}7\,eV$ $(1{,}115 \cdot 10^{-19}\,J)$ il faut avoir :

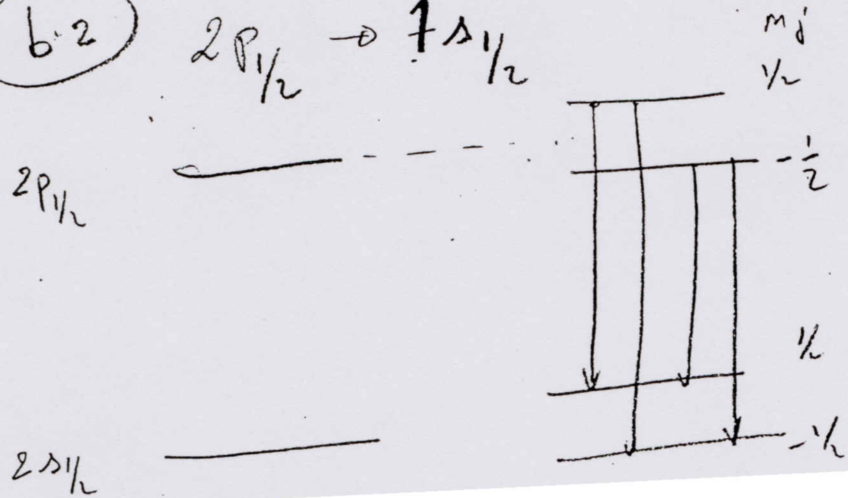
$B \sim \frac{1{,}115 \cdot 10^{-19}}{9{,}27 \cdot 10^{-24}} \approx 12031\,T$! champ énorme !!

et donc $\hat{H}_{Zee} = \frac{\mu_B B}{\hbar} g_J \hat{J}_z$ diagonal dans $|n l s j m_j\rangle$ avec

les valeurs propres :

$$\Delta E_{Zee} = g_J \mu_B B m_j .$$

b.2 $2p_{1/2} \to 1s_{1/2}$

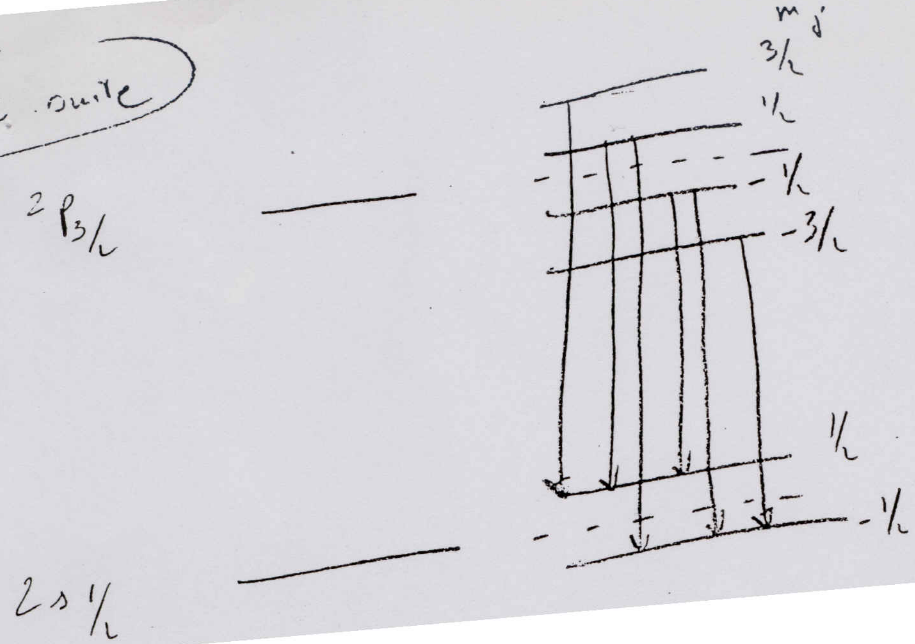


$$g_J = 1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2} - \frac{8}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1/2}{2\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$g = 1 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2} - 0 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}} = 2$$

b2 suite



$$g = 1 + \frac{\frac{3}{2}\frac{5}{2} - \frac{8}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}}$$

$$= 1 + \frac{5/2}{\cancel{2}\,\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}} = \frac{4}{3}$$

$$g = 2$$

5 Le tableau suivant donne les valeurs expérimentales des énergies cinétiques maxima des spectres β^+ pour des noyaux émetteurs satisfaisant la relation $A = 2Z - 1$, les noyaux résiduels étant tous produits dans leur état fondamental :

Noyau émetteur	$^{11}_{6}C$	$^{13}_{7}N$	$^{15}_{8}O$	$^{17}_{9}F$	$^{19}_{10}Ne$	$^{21}_{11}Na$	$^{23}_{12}Mg$	$^{25}_{13}Al$
T_{max} en MeV	0,96	1,19	1,74	1,74	2,23	2,50	3,00	3,24

Noyau émetteur	$^{27}_{14}Si$	$^{29}_{15}P$	$^{31}_{16}S$	$^{33}_{17}Cl$	$^{35}_{18}A$	$^{37}_{19}K$	$^{39}_{20}Ca$	$^{41}_{21}Sc$
T_{max} en MeV	3,80	3,95	4,40	4,50	4,96	5,10	5,50	5,61

A quelle valeur moyenne, $\overline{R}_o$, conduisent ces résultats expérimentaux ?

Sachant que les différentes méthodes de détermination du rayon nucléaire unité conduisent au résultat

$$R_o \simeq 1{,}5 \text{ Fermi}$$

que peut-on conclure de ce problème ?

DONNÉES NUMÉRIQUES :

masse au repos du proton : $m_p = 1{,}007\,276\,63$ u;

masse au repos du neutron : $m_n = 1{,}008\,665\,4$ u;

équivalent énergétique de l'unité de masse : u = 931,480 MeV;

énergie au repos de l'électron : $m_e c^2 = 0{,}511$ MeV;

charge élémentaire d'électricité : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ cb.

$$1/4\,\pi\,\varepsilon_o = 9 \cdot 10^9 \text{ mètre} \times \text{Farad}^{-1}$$

CORRIGÉ

1e question. — Energie coulombienne W_c.

Première méthode. — On utilise la relation :

$$W_c = \frac{1}{2}\iiint V\,dq \qquad (1)$$

qui donne l'énergie dépensée lors de la mise en place des différentes charges d'un système, V désignant le potentiel à l'endroit où se trouve la charge dq et l'intégrale étant étendue à la distribution de charges.

Il nous faut donc établir l'expression du potentiel coulombien à la distance r du centre d'une sphère de rayon R uniformément chargée avec la densité ρ.

Appliquons le théorème de Gauss à une sphère de rayon r :

$$4\,\pi\,r^2\,E(r) = \frac{1}{\varepsilon_o}\,\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho$$

d'où l'expression du champ électrique

$$E(r) = \frac{r\,\rho}{3\,\varepsilon_o}$$

Le potentiel V (r) à la distance r du centre est tel que

$$\int_{r=0}^{r} E(r)\,dr = V_o - V(r)$$

V_o désignant le potentiel au centre de la sphère qui a pour valeur :

$$V_o = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\int_o^R \frac{4\,\pi\,r^2\,\rho}{r}\,dr = \frac{R^2\,\rho}{2\,\varepsilon_o}$$

d'où finalement :

$$V(r) = \frac{\rho}{2\,\varepsilon_o}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) \qquad (2)$$

La relation (1) prend alors la forme :

$$W_c = \frac{1}{2}\int_o^R \frac{\rho}{2\,\varepsilon_o}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) 4\,\pi\,r^2\,\rho\,dr$$

soit, compte tenu de $\rho = \dfrac{3\,Ze}{4\,\pi\,R^3}$:

$$\boxed{W_c = \frac{3}{5}\cdot\frac{Z^2\,e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_o\,R}} \qquad (3)$$

1

Seconde méthode. — Supposons que nous ayions déjà construit une sphère de rayon r. Le potentiel à la surface de cette sphère est analogue à celui qui résulterait de la concentration de toute la charge au centre soit

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot \frac{1}{r} = \frac{r^2 \rho}{3\varepsilon_0}$$

Ajoutons maintenant une pellicule chargée d'épaisseur dr sur cette sphère; le travail à fournir est

$$d W_c = \frac{r^2 \rho}{3\varepsilon_0} \cdot 4\pi r^2 \rho \, dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0} r^4 \, dr$$

En intégrant cette expression de 0 jusqu'à R et en remplaçant ρ par sa valeur on obtient comme plus haut :

$$W_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Puisque R est le même pour des noyaux isobares, la différence d'énergie coulombienne entre 2 isobares de charges Z et Z − 1 sera :

$$W_c(Z) - W_c(Z-1) = \Delta W_c = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}(2Z-1) \qquad (4)$$

1

2ᵉ question. — ***Energie au repos des noyaux X et Y.***

Elle peut être écrite respectivement :

$$\left.\begin{aligned} M_X c^2 &= [Z M_P + (A - Z) M_n] c^2 - B_X \\ M_Y c^2 &= [(Z-1) M_P + (A - Z + 1) M_n] c^2 - B_Y \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

avec M_p et M_n : masses au repos du proton et du neutron, B_X et B_Y : énergies positives de liaison des noyaux.

Les 2 noyaux considérés étant des noyaux miroirs nous avons

$$A = Z + (Z - 1) = 2Z - 1$$

D'autre part l'énergie de liaison B d'un noyau peut être décomposée en 2 termes :

$$B = B_{nucl.} + B_{coul}$$

avec :

$B_{nucl.}$: terme positif qui résulte des forces attractives spécifiquement nucléaires s'exerçant entre les nucléons.

$B_{coul.}$: terme correctif négatif provenant de la répulsion coulombienne entre protons.

Les relations (5) permettent donc d'écrire :

$$(M_X - M_Y) c^2 = (M_P - M_n) c^2 + (B_Y - B_X)_{nucl.} + (B_Y - B_X)_{coul.} \qquad (6)$$

D'après le principe d'Indépendance de charge, l'intensité de la force nucléaire entre 2 nucléons est indépendante de la charge des nucléons considérés. Les noyaux X et Y étant constitués d'un même « cœur » de Z − 1 protons et Z − 1 neutrons auquel on a ajouté 1 proton pour avoir X et 1 neutron pour avoir Y, on peut donc admettre que pour ces deux noyaux, considérés dans leur état fondamental, la différence $(B_Y - B_X)_{nucl.}$ est nulle.

Le résultat de la première question donne d'autre part, en faisant attention au signe :

$$(B_Y - B_X)_{coul.} = -[W_c(Z-1) - W_c(Z)] = \Delta W_c.$$

Compte tenu du fait que $R = R_0 A^{1/3}$ et que $A = 2Z - 1$ pour les noyaux considérés la relation (6) s'écrit finalement

$$\boxed{(M_X - M_Y) c^2 = (M_P - M_n) c^2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2 A^{2/3}}{4\pi\varepsilon_0 R_0}} \qquad (7)$$

3ᵉ question. — ***Transition*** β^+ :

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \beta^+ + \nu_e$$

1

Pour un noyau résiduel formé dans l'état fondamental, compte tenu du fait que la masse au repos du neutrino est nulle et que l'énergie cinétique emportée par le noyau résiduel est toujours négligeable, la conservation de l'énergie totale dans le processus β^+ s'écrit (*)

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + m_e c^2 + T_{\beta+} + T_\nu \qquad (8)$$

(*) Voir Problème n° : 17.

T_{β^+} : énergie cinétique emportée par le positon;

T_ν : énergie emportée par le neutrino;

$m_e c^2$: énergie au repos de l'électron.

La somme $T_{\beta^+} + T_\nu$ est constante et égale à T_{max}, le positon emportant toute l'énergie disponible lorsque le neutrino n'emporte rien. La relation (8) permet donc d'écrire :

$$\boxed{(M_X - M_Y)\, c^2 = T_{max} + m_e c^2} \qquad (9)$$

1

4^e question.

Des relations (7) et (9) on déduit immédiatement :

$$R_o = \frac{b}{T_{max} + a} A^{2/3} \quad \text{avec} \quad a = m_e c^2 + (M_n - M_P)\, c^2 \qquad b = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_o}$$

1 1 1

Application numérique. — a = 0,511 + (1,008 665 4 − 1,007 276 63) × 931,480 = 1,8 MeV.

La dimension de b est : Énergie × Longueur. Exprimons b en MeV × Fermi :

$$b = \underbrace{\frac{3}{5} (1{,}6\,10^{-19})^2 \times 9 \cdot 10^9}_{\text{valeur de b en Joule × mètre}} \times \underbrace{\frac{1}{1{,}6\,10^{-13}}}_{\text{conversion Joule → MeV}} \times \underbrace{\frac{1}{10^{-15}}}_{\text{conversion Mètre → Fermi}}$$

d'où

$$b = 0{,}864 \text{ MeV} \times \text{Fermi}$$

et la relation demandée s'écrit

$$\boxed{R_o = \frac{0{,}864\, A^{2/3}}{T_{max} + 1{,}8} \qquad \begin{matrix} R_o \text{ en Fermi} \\ T_{max} \text{ en MeV} \end{matrix}} \qquad (10)$$

0,5
0,5

5^e question.

Chaque noyau émetteur β^+ du tableau constitue avec le noyau résiduel de la désintégration une paire de noyaux miroirs. La relation (10) est applicable. En respectant l'ordre du tableau on obtient successivement les valeurs suivantes pour R_o :

1,55; 1,60; 1,48; 1,61; 1,53; 1,53; 1,46; 1,47; 1,39; 1,42; 1,38; 1,41; 1,37; 1,39; 1,36; 1,39.

d'où l'on tire

$$\underline{\overline{R}_o = 1{,}45 \text{ Fermi}}$$

1

L'excellent accord entre la valeur moyenne précédente et la valeur $R_o \simeq$ 1,5 Fermi permet de conclure que les hypothèses du calcul doivent correspondre à la réalité, au moins en première approximation, soit :

— Validité de la relation $R = R_o A^{1/3}$ traduisant le fait que le volume du noyau est proportionnel au nombre de nucléons qu'il contient : « modèle à masse spécifique constante ».

— Distribution uniforme de la charge électrique à l'intérieur du noyau.

— Indépendance de charge des forces nucléaires.

1

Le rayon des noyaux varie donc en gros de 1,5 à 10 Fermis lorsque A varie de 1 à 250 et il est bon de rappeler que le rayon des atomes correspondants est environ 10^4 fois plus grand ce qui permet d'affirmer que le vide occupe la presque totalité de la matière.

EXERCICES

pb

1° Reprendre le problème précédent en supposant la charge du noyau concentrée sur la surface de la sphère nucléaire.

Réponse : Si l'on suppose la charge concentrée sur la surface du noyau, il faut remplacer le facteur 3/5 de l'équation (4) par le facteur 1/2.

La relation (10) s'écrit alors :

$$R_o = \frac{0{,}720\, A^{2/3}}{T_{max} + 1{,}8}$$

conduisant à des valeurs de R_o plus faibles ($\overline{R}_o$ = 1,21 Fermi).