I - a) $H = \dfrac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m_1} + \dfrac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m_2} - \dfrac{Ze^2}{r_1} - \dfrac{Ze^2}{r_2} + \dfrac{e^2}{r_{12}}$

b) on néglige $\dfrac{e^2}{r_{12}}$ dans approx e^- totalement indépendants

c) configuration $1s^2$: deux e^- 1s "voyant" noyau $Z = 2$

$\Rightarrow E = -8\varepsilon_i = -108,8\,eV$ $\quad \left\{ E_n = -\dfrac{Z^2 \varepsilon_i}{n^2} \right.$ avec $\varepsilon_i = 13,6\,eV$

II - $(1s, ns)$

a) $E = -\dfrac{4\varepsilon_i}{1^2} - \dfrac{4\varepsilon_i}{n^2} = -4\varepsilon_i\left[1 + \dfrac{1}{n^2}\right] = -54,4\left[1 + \dfrac{1}{n^2}\right]\,eV$

b) tend $\to -54,4\,eV$ quand $n \to \infty$ système $\to He^+$

[pour $n = 2$ $E = -54,4 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \underline{-68\,eV}$]

III a) $r_n = \dfrac{n^2 a_0}{Z}$ avec $a_0 = 0,53\,Å$ (pour $\mu = m_e$)

électron 1 : $n = 1$ et $Z = 2$ $\quad r_1 = \dfrac{a_0}{2}$

électron 2 $n = n$ et $Z = 1$ $\Rightarrow r_2 = \dfrac{n^2 a_0}{1} = n^2 a_0$

b) $E = -\varepsilon_i\left[\dfrac{2^2}{1^2} + \dfrac{1^2}{2^2}\right] = -\varepsilon_i\left[\dfrac{17}{4}\right] = \underline{-57,8\,eV}$

c). proba de présence de l'électron 1s entre 0 et $n^2 a_0$.

$$P = \int_0^{n^2 a_0} r^2 |R_{1s}(r)|^2\,dr = \int_0^{n^2 a_0} r^2\, 4\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \exp\left(-\frac{2Zr}{a_0}\right) dr$$

$\to P = 1 - \exp(-4n^2)\left[8n^4 + 4n^2 + 1\right]$

$P \to 1$ quand $n \to \infty$

d) $\to$ pour e^- 1s : $Z_{eff} = 2$

pour e^- ns : $Z_{eff} = (2 - P) = 1 + \exp(-4n^2)\left[8n^4 + 4n^2 + 1\right]$

voir autre feuille (sol3)

$E(n) = -\varepsilon_i\left[\dfrac{2^2}{1^2} + \dfrac{Z_{2eff}^2}{n^2}\right] = -54,4 - 13,6\,\dfrac{\left[1 + \exp(-4n^2)(8n^4 + 4n^3 + 1)\right]^2}{n^2}$ (eV)

d) $\to$ qd $n \to \infty$ $E(n) \to -54,4\,eV$ ≈ [système $\to He^+$ idem II b)]

$$R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)$$

Sol (2)

détail calculs du III.c

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \approx \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$$

pour He avec hypothèses énoncé $Z = 2 \Rightarrow$

$$|R_{10}(r)|^2 = 4\left(\frac{2}{a_0}\right)^3 \exp\left(-\frac{2\times 2r}{a_0}\right) = \frac{32}{a_0^3}\exp\left(-\frac{4r}{a_0}\right).$$

électron ns a une orbite $r_n = \frac{n^2 a_0}{Z} = n^2 a_0$ ($Z = 1$ pour e^- ~~ns~~ dans hypothèses énoncé)

$$P = \int_0^{n^2 a_0} r^2 |R_{10}(r)|^2 \, dr$$

$$= \int_0^{n^2 a_0} \frac{32}{a_0^3} r^2 \exp\left(-\frac{4r}{a_0}\right) dr$$

$\frac{4r}{a_0} = 2x$ $\quad \left\{ x = \frac{2r}{a_0} \right.$

$r = \frac{a_0 x}{2}$

$dr = \frac{a_0}{2} dx$

$$= \int_0^{2n^2} \frac{\cancel{32}^{\,4}}{\cancel{a_0^3}} \frac{\cancel{a_0^2} x^2}{\cancel{4}} \exp(-2x) \frac{\cancel{a_0}}{\cancel{2}} dx$$

$r = n^2 a_0$

$\Rightarrow x = \frac{2r}{a_0} = \frac{2n^2 a_0}{a_0} = 2n^2$

$$\boxed{P = 4\int_0^{2n^2} x^2 \exp(-2x)\, dx}$$

$$P = 4\left[-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)\exp(-2x)\right]_0^{2n^2} = 4\left[-\left(2n^4 + n^2 + \frac{1}{4}\right)\exp(-4n^2) - \left[-\frac{1}{4}\right]\right]$$

$$= 4\left[1/4 - \left(2n^4 + n^2 + \frac{1}{4}\right)\exp(-4n^2)\right]$$

$$P = 1 - (8n^4 + 4n^2 + 1)\exp(-4n^2)$$

n	1	2
P	0,762	0,99998 !

He. r_{1s} (avec $Z = 2$) $= \frac{n^2 a_0}{Z} = \frac{a_0}{2}$

r_{2s} (avec $Z = 1$) $= \frac{n^2 a_0}{Z} = 4a_0$

normal !

$\leadsto$ $n \to \infty$ $P \to 1$.

sol 3

$$Z_{eff} = 2 - \rho = 1 + (8n^4 + 4n^2 + 1)\exp(-4n^2)$$

$n = 1 \quad Z_{eff} = 1 + 13 \times \exp(-4) = 1,238$

$n = 2 \quad Z_{eff} = 1 + (128 + 16 + 1)\exp(-16) = 1,000016$!

III

1) $$E = -\mathcal{E}_i \left[\frac{2^2}{1^2} + \frac{Z_{eff}^2}{n^2} \right]$$

pour $n = 1$ $= -\mathcal{E}_i \left[4 + \frac{(1,238)^2}{1^2} \right] = -75,2 \text{ eV}$

pour $n = 2$ $= -\mathcal{E}_i \left[4 + \frac{\sim 1^2}{2^2} \right] \simeq \underline{-57,8 \text{ eV}}$

<u>sans intérêt</u> par rapport aux résultats du <u>II</u>.

2) Si on fait $n = 1$ dans expression générale on trouve une valeur de $E = -\mathcal{E}_i \left[4 + \frac{(1,238)^2}{1} \right] = -75,2 \text{ eV}$, pas très éloignée de valeur correcte (-79 eV), <u>mais</u> les 2 e^- sont traités différemment alors qu'ils sont identiques ! [~~un~~ $Z_{eff} = 2$ et l'autre avec $Z_{eff} = 1,238$]

de plus pb indiscernabilité des particules !

IV. a et b) La fonction d'onde complète est un produit (correctement antisymétrisé) de la fonction d'onde d'espace par la fonction d'onde de spin. Il existe trois fonctions d'onde symétriques de spin associées à la fonction d'onde d'espace antisym et une — — antisym — — — symétrique

Comme calcul des J et K ne porte que sur variable d'espace on obtiendra 2 valeurs de la correction énergétique, 1 correspondant au triplet de spin ($S=1$) et une correspondant au singulet de spin ($S=0$). La fonction d'onde antisym d'espace (triplet pour spin) s'annule pour $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ (les 2 e^- ne peuvent pas trop se rapprocher sol 4

et pour cet état la répulsion électrostatique est faible (correction minimale due au terme $\frac{e^2}{r_{12}}$) – Le triplet est donc "sous" le singulet

et $(J+K) \leftrightarrow {}^1S$

$[J-K] \leftrightarrow {}^3S$.

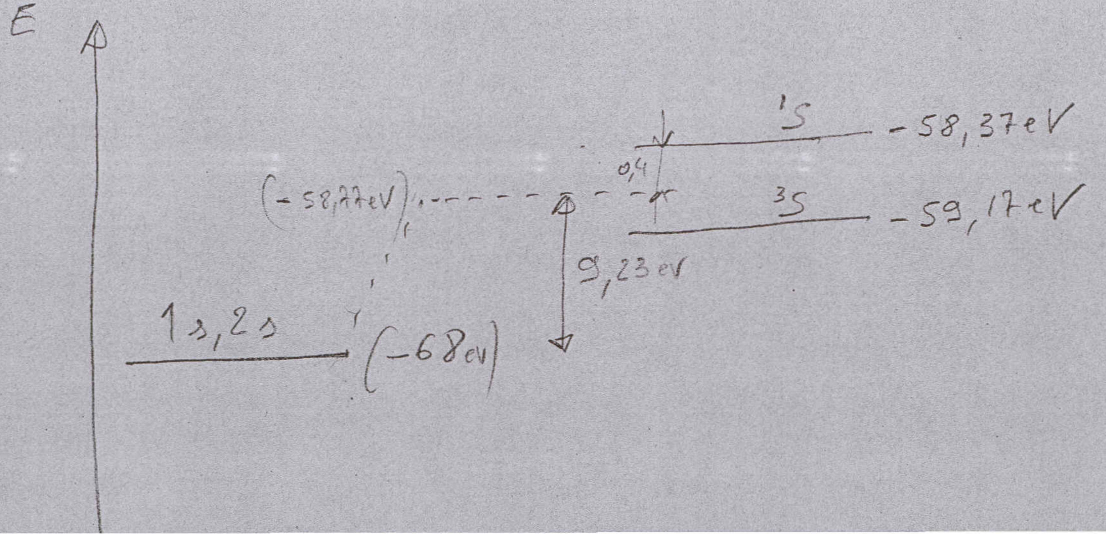
c) $J_{2s} = 9{,}23\,eV \quad K_{2s} = 0{,}40\,eV$

$$E_{1s,2s} = E_{1s} + E_{2s} + J_{2s} \pm K_{2s}$$

Calculés dans approx e^- indépendants.

$$\left.\begin{aligned} E_{1s} &= -13{,}6 \times \frac{2^2}{1^2} \\ + E_{2s} &= -13{,}6 \times \frac{2^2}{2^2} \end{aligned}\right\} = -13{,}6\,[4+1] = -68\,eV$$

$$E_{1s,2s} = -68 + 9{,}23 \pm 0{,}4 = -58{,}77 \pm 0{,}4\ eV$$



1) a) Energie de répulsion coulombienne

$$V(r) = \rho \frac{r^2}{3\varepsilon_0} \qquad W = qV \qquad dW = \rho \frac{r^2}{3\varepsilon_0} \rho \, 4\pi r^2 dr$$

$$dW = V dq$$

$$dW = \frac{4\pi \rho^2}{3\varepsilon_0} r^4 dr \qquad \text{avec } \rho = \frac{3Ze}{4\pi R^3}$$

$$dW = \frac{3 Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6} r^4 dr \Rightarrow \boxed{W_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}} \quad \text{avec } R = r_0 A^{1/3}$$

b) Pour noyau Z $\qquad W_Z = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Pour noyau Z-1 $\qquad W_{Z-1} = \frac{3}{5} \frac{(Z-1)^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} (Z^2 - 2Z + 1)$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta W = \frac{3}{5} \frac{e^2 (2Z-1)}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

c) Noyau le + stable pour A = 43. $\Leftrightarrow \frac{\partial B}{\partial Z} = 0$

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_3 A^{-1/3} Z + 4a_4 (A - 2Z) A^{-1} = 0$$

$$\boxed{Z = \frac{2a_4}{a_3 A^{-1/3} + 4a_4 A^{-1}}} \qquad \text{AN: } Z = \frac{2 \times 19}{0{,}6 \, 43^{-1/3} + 4 \times 19 \times 43^{-1}} =$$

e)

9. Radioactivité des éléments transuraniens

a. L'équation de la réaction nucléaire s'écrit :

$$^{246}_{96}\text{Cm} + \text{X} \rightarrow {}^{254}_{102}\text{No} + 4\,n$$

On en déduit pour le noyau X $A = 12$ et $Z = 6$; les projectiles sont donc des noyaux de carbone 12.

b. La durée au bout de laquelle 99 % des noyaux initialement présents ont disparu est telle que :

$$N(t) = \frac{N(0)}{1000} = N(0)\exp(-\lambda t) \quad \text{d'où} \quad t = \frac{\ln 1000}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{0,693} \times 6,907 = 27,9 \text{ s}$$

c. L'équation de réaction de la désintégration β^- de $^{255}_{99}$Es et celle de la désintégration α de $^{254}_{102}$No s'écrivent, respectivement :

$$^{255}_{99}\text{Es} \rightarrow \text{Y'} + e^- + \bar{\nu} \quad \text{et} \quad {}^{A}_{Z}\text{No} \rightarrow \text{X'} + \alpha$$

On en déduit A = 255 pour le noyau de fermium et $Z = 102$ pour le noyau de nobium.

3) Réponse. — Le processus *a*) est énergétiquement possible à partir de neutrons libres; les électrons émis ont une énergie cinétique maximum qui, dans le système propre du neutron, vaut :

$$939{,}550 - 938{,}256 - 0{,}511 = 0{,}783 \text{ MeV}$$

(La période radioactive du neutron libre est voisine de 13 minutes).
Le processus *b*) est impossible à partir de protons libres.

4) La valeur moyenne de l'énergie cinétique de fission a pour expression :

$$\langle \mathcal{E}_k \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \mathcal{E}_k n_{\mathcal{E}} \,\mathrm{d}\,\mathcal{E}_k \quad \text{avec} \quad N = \int_0^{\infty} n_{\mathcal{E}} \,\mathrm{d}\,\mathcal{E}_k$$

Ces deux intégrales s'écrivent, respectivement, en posant $x = \mathcal{E}_k / b$:

$$ab^{5/2} \int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad ab^{3/2} \int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

Pour comparer ces deux intégrales, il suffit de noter que :

$$\int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \left\{ -x^{3/2} \exp(-x) \right\}_0^{\infty} + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} x^{1/2} \exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

a) On en déduit :

$$\langle \mathcal{E}_k \rangle = \frac{3b}{2} = 1{,}995 \text{ MeV}$$

b) Comme $m_n c^2 = 938$ MeV, ce qui est très supérieur à $\langle \mathcal{E}_k \rangle$, les neutrons de fission peuvent être considérés newtoniens.