Corrigé

Phys. At.

a) Des particules sont dites "indiscernables" si elles sont "identiques" c'est-à-dire si toutes leurs propriétés intrinsèques (masse, spin, charge, etc...) sont exactement les mêmes.
Lorsqu'un système physique contient deux particules identiques, rien n'est changé dans ses propriétés et son évolution si l'on échange les rôles de ces deux particules.

b) Conf. $1s^2\, 2s$

$\hookrightarrow L=0 \quad S=0$ couche pleine.

électron indiscernable

$+$

$l=0 \quad s=\frac{1}{2} \Rightarrow L=0 \quad S=\frac{1}{2}$

$J=\frac{1}{2}$ donc $^{2}S_{1/2}$ "(2S+1)" "(L)" "(J)"

Conf. $1s\, 2s^2$

$\begin{matrix} l=0 \\ s=\frac{1}{2} \end{matrix} + \begin{matrix} L=0 \\ S=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} L=0 \\ S=\frac{1}{2} \end{matrix} \quad J=\frac{1}{2} \quad {}^{2}S_{1/2}$

couche pleine.

conf $1s\,2s\,2p$

$\ell=0$ + $\ell=0$ $\Rightarrow$ $L=0$ + $\ell=1$ $\Rightarrow$ $L=1$

$s=\frac{1}{2}$ + $s=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $S=0$ ou $S=1$ + $s=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $S=0+s=\frac{1}{2}\Rightarrow S=\frac{1}{2}$

$S=1+s=\frac{1}{2}\Rightarrow S=\frac{1}{2}$, $S=\frac{3}{2}$

donc $J=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ ou $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}$

~~finalement~~ $^2P_{1/2,\,3/2}$ ou $^4P_{1/2,\,3/2,\,5/2}$

c) $$\langle d_{x,y,z}\rangle = \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \psi^*_{n\ell m}\, d_{x,y,z}\, \psi_{n\ell m}\, r^2 \sin\theta \,d\theta\, d\varphi\, dr$$

or $\psi_{n\ell m} = R_{n\ell}(r)\, Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ donc en général

$$\langle d_{x,y,z}\rangle = \underbrace{\int_0^\infty R^*_{ne}(r)\, r\, R_{ne}(r)\, r^2 dr}_{\text{cela ne peut jamais être nul}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_e^{*m}(\theta,\varphi) \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \text{ou} \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \text{ou} \\ \cos\theta \end{pmatrix} Y_e^m(\theta,\varphi) \times \sin\theta\, d\theta d\varphi$$

donc on étudie la partie angulaire

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Rappel} \\ d(\sin\theta) = \cos\theta\, d\theta \\ d(\cos\theta) = -\sin\theta\, d\theta\end{array}}$

- Ψ_{100} $\quad \langle d_x\rangle = 0$ car $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$ — de même pour $\Psi_{2,1,0}$ et $\Psi_{21\pm1}$

  $\langle d_y\rangle = 0$ car $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$ — de même pour $\Psi_{2,1,0}$ et $\Psi_{21\pm1}$

  $\langle d_z\rangle = 0$ car $\int_0^{\pi} \cos\theta\sin\theta\, d\theta = 0$

- Ψ_{210} $\quad \langle d_z\rangle = 0$ car $\int_0^{\pi} \cos^3\theta\, \sin\theta\, d\theta = 0$

- $\Psi_{21\pm1}$ $\quad \langle d_z\rangle = 0$ car $\int_0^{\pi} \sin^3\theta\cos\theta\, d\theta = 0$

2) Modèle de la goutte liquide

Energie de liaison $\left\{ B = \underbrace{a_1 A}_{\text{énergie volumique}} - \underbrace{a_2 A^{2/3}}_{\text{"non" liaison de surface}} - \underbrace{a_3 Z^2 A^{-1/3}}_{\text{coulombien}} - \underbrace{a_4 (A-2Z)^2 A^{-1}}_{\text{asymétrie proton/neutron}} + \underbrace{\frac{1}{2}(1+(-1)^A)(-1)^Z a_5 A^{-3/4}}_{\text{parité}} \right.$ a_i positifs

1)

2) coefficient a_3

énergie potentielle d'interaction coulombienne ρ : densité volumique de charges

$$dE_p = \frac{(dq)\times(q)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{(\rho dV)\times(\rho V)}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho^2 V dV}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)(4\pi r^2 dr)$$

$$= \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0} r^4 dr$$

$$E_p = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^{R_0} r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{R_0^5}{5} \quad \text{avec } \rho = \frac{3Ze}{4\pi R_0^3}$$

R_0 rayon du noyau $R_0 = r_0 A^{1/3}$

$$\text{soit } E_p = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\times\left(\frac{9Z^2e^2}{16\pi^2 R_0^6}\right)\frac{R_0^5}{5} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\varepsilon_0 R_0} = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 r_0} Z^2 A^{-1/3} \Rightarrow a_3 = \frac{3e^2}{20\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

3) A impair.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{terme de parité nul} \\ \text{Masse du noyau} \propto (a_1 A - B) = a_2 A^{2/3} + a_3 A^{-1/3} Z^2 + a_4 A^{-1}(A-2Z)^2 \end{array}\right.$

$$= (a_3 A^{-1/3} + 4a_4 A^{-1}) Z^2 - 4a_4 Z + (a_2 A^{2/3} + a_4 A)$$

eq d'une parabole

A pair $\left\{ \begin{array}{l} Z \text{ pair} \\ Z \text{ impair} \end{array}\right.$ parité $\left\{ \begin{array}{l} a_5 A^{-3/4} \\ -a_5 A^{-3/4} \end{array}\right.$ 2 paraboles

3) Production de ^{26}Al dans notre galaxie

Raie γ à 1,8 MeV ^{26}Al ($T_{1/2}$ = 1 million d'années)

$f_{\text{supernovae}} = 0{,}03$

$\phi_\gamma = 5\ 10^{-4}\ s^{-1}\ cm^{-2}$

$m_{Al\ \text{éjecté}} = 6\ 10^{-5} M_\odot$

1) Emission stationnaire

N : nbre de noyaux ^{26}Al

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{-\frac{N}{\tau}}_{\text{décroissance radioactive}} + \underbrace{Y}_{\text{terme source (production) = cste}}$$

Compte tenu des relations (7), (10) et (12) du problème précédent il faut donc que l'on ait simultanément :

$$ {}^{A}_{Z}Mc^2 - {}^{A}_{Z-1}Mc^2 < 2\ m_ec^2 $$

$$ {}^{A}_{Z}Mc^2 - {}^{A}_{Z-1}Mc^2 < B_K\ (Z - 1) $$

$$ {}^{A}_{Z-1}Mc^2 - {}^{A}_{Z}Mc^2 < 0 $$

On en déduit la condition de stabilité des deux isobares adjacents :

$$ 0 < {}^{A}_{Z}Mc^2 - {}^{A}_{Z-1}Mc^2 < B_K\ (Z - 1) $$

REMARQUE : La condition précédente n'est jamais satisfaite et il n'existe pas deux isobares stables adjacents exception faite de la paire ${}^{113}_{48}Cd$, ${}^{113}_{49}In$ dont l'existence est attribuée à la grande différence de moment angulaire entre les deux noyaux.

3° *On donne l'expression de la formule semi-empirique donnant la masse de l'atome neutre correspondant au noyau (A, Z) considéré dans l'état fondamental :*

$$ {}^{A}_{Z}M = ZM_H + (A - Z)\ M_n - a_v\ A + a_s\ A^{2/3} + a_c\ \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a\ \frac{\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2}{A} + \delta\ (A, Z) \qquad \text{(I)} $$

avec :

$$ \delta\ (A, Z) = \begin{cases} a_p\ A^{-3/4} & \textit{pour A pair et Z impair} \\ 0 & \textit{pour A impair} \\ -\ a_p\ A^{-3/4} & \textit{pour A pair et Z pair} \end{cases} $$

a_c, a_s, a_v, a_a, a_p *sont des constantes positives.*

M_H *et* M_n *désignent respectivement la masse de l'atome d'Hydrogène* ${}^{1}H$ *et la masse du neutron;* $(M_n - M_H)\ c^2 = 0{,}782$ MeV.

Dans cet exercice on se limite aux valeurs impaires de A.

a) *Montrer que pour une valeur fixée de A (impaire) la relation (I) est équivalente à*

$$ {}^{A}_{Z}M - {}^{A}_{Z_o}M = a\ (Z - Z_o)^2 \qquad \text{(II)} $$

${}^{A}_{Z_o}M$ *désignant la masse d'un isobare fictif de charge* Z_o *non nécessairement égale à un entier et a une constante.*

b) *En utilisant la relation (II) donner l'expression de l'énergie disponible pour une désintégration* β^- *à partir du noyau (A, Z). Quelle relation doit-il exister entre Z et* Z_o *pour que l'émission* β^- *soit énergétiquement possible ?*

c) *Déterminer les valeurs numériques de a et* Z_o *correspondant à A = 131 sachant que les énergies disponibles pour les désintégrations* β^- *de* ${}^{131}_{52}Te$ *et* ${}^{131}_{53}I$ *sont respectivement 2,28 et 0,97 MeV.*

d) *Quelle relation approchée existe-t-il entre les nombres A et Z pour les noyaux stables de A impair ? En déduire une valeur approchée du rapport N/Z pour les noyaux lourds stables (N : nombre de neutrons).*

On donne les équivalents énergétiques des coefficients a_a *et* a_c *:*

$$ a_a = 77{,}286\ \text{MeV};\ a_c = 0{,}584\ \text{MeV} $$

RÉPONSE. — ***a)*** Pour une valeur fixée impaire de A on a $\delta\ (A, Z) = 0$ et la relation (I) est de la forme :

$$ {}^{A}_{Z}M = \alpha\ Z^2 + \beta\ Z + \gamma \qquad \text{(a)} $$

avec :

$$ \alpha = \frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{a_a}{A} \qquad \text{(b)} $$

Le coefficient α étant positif, la parabole (a) admet un minimum. En notant ${}^{A}_{Z_o}M$ et Z_o les coordonnées de ce minimum, on peut encore écrire :

$$ {}^{A}_{Z}M - {}^{A}_{Z_o}M = a\ (Z - Z_o)^2 \qquad \text{(c)} $$

b) L'énergie disponible pour une désintégration β^- à partir du noyau (A, Z) s'écrit :

$$ Q_{\beta^-} = ({}^{A}_{Z}M - {}^{A}_{Z+1}M)\ c^2 \qquad \text{(d)} $$

soit en utilisant la relation (c) :

$$ Q_{\beta^-} = [a\,(Z - Z_o)^2 - a\,(Z + 1 - Z_o)^2]\ c^2 = 2\,a\,c^2\left(Z_o - Z - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(e)} $$

L'émission β^- n'est énergétiquement possible que si Q_{β^-} est positif, ce qui entraîne :

$$ Z \leqslant Z_o - \frac{1}{2} \qquad \text{(f)} $$

c) APPLICATION NUMÉRIQUE :

$$ Z = 52 \qquad Q_{\beta^-} = 2\ ac^2\ (Z_o - 52{,}5) = 2{,}28\ \text{MeV} $$

$$ Z = 53 \qquad Q_{\beta^-} = 2\ ac^2\ (Z_o - 53{,}5) = 0{,}97\ \text{MeV} $$

La résolution de ce système conduit à :

$$a_c c^2 = 0{,}655 \text{ MeV} \qquad \text{et} \qquad Z_0 = 54{,}2$$

Remarque : L'isobare stable (unique) avec $A = 131$ est ${}^{131}_{54}\text{Xe}$: c'est le noyau le plus près du creux de la parabole.

d) Les noyaux stables de A impair se trouvent au voisinage des minima des paraboles de masse.

En écrivant :

$$\left(\frac{\partial\,({}^{A}_{Z}M)}{\partial Z}\right)_{A = \text{ct}} = 0 \qquad \text{(g)}$$

on obtient la relation suivante :

$$M_n - M_H + a_a = 2\left(\frac{a_c}{A^{1/3}} + \frac{a_a}{A}\right) Z$$

soit

$$(M_n - M_H)\,c^2 + a_a c^2 = 2\left(\frac{a_c c^2}{A^{1/3}} + \frac{a_a c^2}{A}\right) Z \qquad \text{(h)}$$

et numériquement :

$$\frac{A}{Z} = 1{,}98 + 0{,}015\,A^{2/3} \qquad \text{(i)}$$

Faisant $A = 230$ (noyau lourd) dans cette expression on obtient $Z \simeq 90$ d'où l'on déduit le rapport $N/Z \simeq 1{,}55$.

4° Quelle loi de conservation conduit à introduire un antineutrino plutôt qu'un neutrino dans la désintégration β^- ?

RÉPONSE. — Conservation du nombre leptonique.

On rappelle que β^- et ν sont des leptons (nombre leptonique + 1) tandis que β^+ et $\bar{\nu}$ sont des antileptons (nombre leptonique − 1).

18

RÉACTIONS NUCLÉAIRES A BASSE ÉNERGIE NOYAU COMPOSÉ

On considère le noyau composé ${}^{28}_{14}\text{Si}$ et les différents modes de formation et de décomposition suivants :

$$
\begin{array}{llcll}
\text{(I)} & {}^{4}_{2}\alpha + {}^{24}_{12}\text{Mg} & \searrow & {}^{24}_{12}\text{Mg} + {}^{4}_{2}\alpha & \text{(I)} \\
\text{(II)} & {}^{1}_{0}n + {}^{27}_{14}\text{Si} & \rightarrow ({}^{28}_{14}\text{Si})^* \rightarrow & {}^{27}_{14}\text{Si} + {}^{1}_{0}n & \text{(II)} \\
\text{(III)} & {}^{1}_{1}p + {}^{27}_{13}\text{Al} & \nearrow & {}^{27}_{13}\text{Al} + {}^{1}_{1}p & \text{(III)}
\end{array}
$$

et nous écrirons de façon générale :

$$a + A \rightarrow (C)^* \rightarrow B + b$$

1° Donner le spin et la parité du noyau composé selon qu'il est formé suivant les modes (I), (II) *ou* (III), *la capture de la particule légère incidente étant effectuée dans l'onde* S ($l = 0$) *ou dans l'onde* P ($l = 1$).

On donne le spin J *et la parité* P *des noyaux suivants, dans l'état fondamental et dans la notation* $(J)^P$ *:*

Noyau	${}^{1}_{0}n$	${}^{1}_{1}p$	${}^{4}_{2}\alpha$	${}^{24}_{12}\text{Mg}$	${}^{27}_{13}\text{Al}$	${}^{27}_{14}\text{Si}$
$(J)^P$	$\left(\frac{1}{2}\right)^+$	$\left(\frac{1}{2}\right)^+$	$(0)^+$	$(0)^+$	$\left(\frac{5}{2}\right)^+$	$\left(\frac{5}{2}\right)^+$

2° En considérant la réaction

$${}^{1}_{0}n + {}^{24}_{14}\text{Si} \rightarrow ({}^{28}_{14}\text{Si})^* \rightarrow {}^{24}_{12}\text{Mg} + {}^{4}_{2}\alpha$$

préciser les valeurs possibles pour le moment angulaire orbital de la voie de sortie, le neutron incident étant supposé capté dans l'onde S *et le noyau de Magnésium produit dans son état fondamental.*

3° On considère le noyau composé C *formé à partir de la voie d'entrée* a + A. *Etablir l'expression de l'énergie d'excitation,* W_{ex}, *de ce noyau composé en fonction des masses des particules de la voie d'entrée et de l'énergie cinétique* T_a *de la particule incidente exprimée dans le laboratoire. Le noyau cible sera supposé au repos dans le laboratoire.*