UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

M1 Sciences de l'univers et technologies spatiales

année 2021/2022

# EXAMEN TERMINAL de compléments de mécanique quantique EMSUA1B1

Session du 29 septembre 2021

*Durée : 1h30 - Tous documents interdits*

**Questions de cours :**

- Exprimer la relation dite *de fermeture* à l'aide de l'opérateur de projection ; à quoi sert-elle ?
- Démontrer le terme de phase temporelle dans la solution $\Psi$ de l'équation de Schrödinger à une variable d'espace *x*.
- Démontrer la condition de stationnarité d'un électron sur une orbite classique circulaire d'un atome d'Hydrogène à l'aide de sa longueur associée ; retrouver et exprimer l'hypothèse ad-hoc formulée par Bohr dans son modèle semi-empirique.
- Exprimer les commutateurs $[J_i, J_j]$ en base cartésienne, avec $\boldsymbol{J}$ vecteur moment cinétique total.
- Démontrer l'expression vectorielle qui relie moment magnétique et moment cinétique orbitaux.
- Décrire succinctement l'expérience de Stern et Gerlach.
- Rappeler la correction en énergie à l'ordre 1 pour un système dans un état stationnaire, non dégénéré et qui subit une perturbation *W*.

**Exercice : états quasi-classiques de l'oscillateur harmonique**

Le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ peut s'écrire, en introduisant les observables $X' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ et $P' = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}}$ ainsi que les opérateurs d'annihilation $a$ et de création $a^+$ tels que $a = \frac{X' + iP'}{\sqrt{2}}$ et $a^+ = \frac{X' - iP'}{\sqrt{2}}$, sous la forme $H = \hbar\omega(a^+a + 1/2)$ (avec $[a, a^+] = 1$).

On se propose ici d'étudier les états propres $|\alpha\rangle$ de l'opérateur $a$ : $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ qui sont appelés états quasi-classiques comme on pourra le comprendre à la fin du problème.

1. On décompose $|\alpha\rangle$ sur la base habituelle $\{|n\rangle\}$ des états propres de $H$ : $|\alpha\rangle = \sum_n C_n|n\rangle$.

   En utilisant la relation de récurrence $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, montrer que pour toute valeur de $\alpha$ complexe, il existe une autre relation de récurrence simple entre les coefficients $C_n$ correspondant ce qui permet de les calculer tous à partir un premier $C_0$. En déduire qu'il existe un état propre $|\alpha\rangle$ de $a$ quel que soit $\alpha$.

2. Calculer les coefficients $C_n$ en normalisant $|\alpha\rangle$.
3. Quelle est la probabilité de trouver $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ lors d'une mesure de l'énergie sur l'état $|\alpha\rangle$.
4. Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle E\rangle$ et l'écart quadratique $\Delta E$ quand l'oscillateur est dans l'état $|\alpha\rangle$. Montrer que l'énergie est d'autant mieux définie que $|\alpha|$ est grand.