Correction questions de cours

- Relation de fermeture $\sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N} |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}$ opérateur identité ← projecteur

  ⇒ s'assurer que la base est complète

- Phase temporelle ⇒ éq Schrödinger dép du temps $\hat{H}|\psi_{(x,t)}\rangle = i\hbar \frac{\partial|\psi_{(x,t)}\rangle}{\partial t}$

$$|\psi(x,t)\rangle = |\varphi(x)\rangle|\phi(t)\rangle$$

$$\hat{H}|\varphi(x)\rangle|\phi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial|\varphi(x)\rangle|\phi(t)\rangle}{\partial t} = i\hbar|\varphi(x)\rangle\frac{\partial|\phi(t)\rangle}{\partial t}$$

$$= E|\varphi(x)\rangle|\phi(t)\rangle$$

éq diff 1er ordre

$$\Rightarrow |\phi(t)\rangle = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

$$\Rightarrow |\psi(x,t)\rangle = |\varphi(x)\rangle e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

- Cdt stationnarité H : $2\pi r = n\lambda$ n entier

  périmètre = multiple entier longueur d'onde

  avec $\lambda = \frac{h}{p}$ ← qté de mvt

$$2\pi r = n\frac{h}{p} \Leftrightarrow \underbrace{pr}_{m^t \text{ cinétique}} = \frac{h}{2\pi}\times n = n\hbar$$

  ⇒ on retrouve la quantification de $\vec{L}$ m^t cinétique (Bohr)

- $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ et par permutations circulaires

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x \text{ puis } [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

- $\vec{\mu} = i\vec{A}$ (m^t magnétique ; normale et surface)

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{t} \text{ avec } t = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow i = \frac{qv}{2\pi r}$$

$$\vec{A} = \pi r^2 \vec{n}$$

$$= \frac{qv}{2\pi r}\pi r^2\vec{n} = \frac{qvr}{2}\vec{n} = \frac{q}{2m}\vec{L} \leftarrow m^t \text{ cinétique}$$

- Stern et Gerlach ⇒ mise en évidence d'1 forme quantification spatiale (directions privilégiées) celle du spin d'1 particule dotée d'1 m^t magnétique ds un gradient de champ magnétique $\vec{F} = \mu_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\vec{e_z}$

- Ordre 1 en énergie ⇒ $E_n^{(1)} = \langle\varphi_n^{(0)}|W|\varphi_n^{(0)}\rangle$ $|\varphi_n\rangle$ base, W perturbation $\ll H_0$

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \quad ; \quad \hat{X}' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{X} \quad ; \quad \text{annihilation } \hat{a} = \frac{X' + iP'}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{P}' = \frac{\hat{P}}{\sqrt{m\hbar\omega}} \qquad \text{création } \hat{a}^+ = \frac{X' - iP'}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow H = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2) \qquad [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

a) $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ base $|n\rangle$

récurrence $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$

$$\begin{cases} \hat{a}|\alpha\rangle = \hat{a}\sum_n c_n |n\rangle = \sum_n c_n \hat{a}|n\rangle = \sum_n c_n \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \alpha\sum_n c_n |n\rangle \end{cases}$$

Multiplions par le bras $\langle m|$: $\alpha \sum_n c_n \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\substack{\delta_{mn} \\ \delta=1\ m=n}} = \sum_n c_n\sqrt{n}\underbrace{\langle m|n-1\rangle}_{\substack{\delta_{m\,n-1} \\ \delta=1\ m=n-1}}$

ou $n = m+1$

$$\alpha\, c_m = c_{m+1}\sqrt{m+1}$$

soit $c_{m+1} = \dfrac{\alpha c_m}{\sqrt{m+1}}$ relation de récurrence

ou $c_n = \alpha\dfrac{c_{n-1}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{n-1}}c_{n-2}\right)\cdots = \dfrac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0$ ↑ premier coefficient

b) Normalisation $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = \sum_n |c_n|^2 \underbrace{\langle n|n\rangle}_{1 \text{ base orthonormale}} = \sum_n |c_n|^2 = \sum_n \dfrac{|\alpha|^{2n}}{n!}|c_0|^2$

$$= |c_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1$$

$$\Rightarrow |c_0|^2 = \frac{1}{e^{|\alpha|^2}} = e^{-|\alpha|^2}$$

$$\text{soit } |c_0| = e^{-|\alpha|^2/2}$$

$\Rightarrow$ Etat propre $|\alpha\rangle$ de $\hat{a}$ quelque soit α

c) Probabilité de mesure $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$: $P_n = |c_n|^2 = \dfrac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}$ $|c_0|^2$

d) Valeur moyenne de l'énergie $\langle E \rangle$, écart quadratique ΔE

- $$\langle \hat{H} \rangle_\alpha = \langle E \rangle = \sum_n P_n E_n = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} (n+1/2)\hbar\omega$$

$$= \sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} n\hbar\omega + \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}}_{=1} \frac{\hbar\omega}{2}$$

$n! = n(n-1)!$

$$|\alpha|^{2n-2+2}$$

$$= \sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{(n-1)!} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= |\alpha|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2(n-1)} e^{-|\alpha|^2}}{(n-1)!} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= |\alpha|^2 \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega\left(|\alpha|^2 + 1/2\right)$$

Autre méthode $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)$

$$\langle \hat{H} \rangle_\alpha = \hbar\omega \langle \alpha | (\hat{a}^+\hat{a} + \tfrac{1}{2}) | \alpha \rangle$$

$$= \hbar\omega \underbrace{\langle \alpha | \hat{a}^+}_{\alpha^* \langle \alpha |} \underbrace{\hat{a} | \alpha \rangle}_{\alpha | \alpha \rangle} + \frac{\hbar\omega}{2} \underbrace{\langle \alpha | \alpha \rangle}_{=1}$$

$$= \hbar\omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)$$

- $$\langle \hat{H}^2 \rangle_\alpha = \langle E^2 \rangle = \sum_n P_n E_n^2 = \sum_n P_n \hbar^2\omega^2 (n+1/2)^2 = \hbar^2\omega^2 \sum_n P_n (n^2 + n + 1/4)$$

$$= \hbar^2\omega^2 \left(\sum_n P_n \left(n(n-1) + 2n + 1/4 \right) \right)$$

$$= \hbar^2\omega^2 \left(\frac{1}{4} \underbrace{\sum P_n}_{1} + \sum_n P_n n(n-1) + 2 \sum P_n n \right)$$

$$= \hbar^2\omega^2 \left(\frac{1}{4} + \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{(n-2)!}}_{|\alpha|^4} + 2 \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{(n-1)!}}_{|\alpha|^2} \right)$$

$$= \hbar^2\omega^2 \left(\frac{1}{4} + 2|\alpha|^2 + |\alpha|^4 \right)$$

$\Rightarrow$ Ecart quadratique moyen $$\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \hbar^2\omega^2 \left(\frac{1}{4} + 2|\alpha|^2 + |\alpha|^4 - \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right)^2 \right)$$

$$= \hbar^2\omega^2 \left(\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{2}|\alpha|^2 + \cancel{|\alpha|^4} - \cancel{|\alpha|^4} - |\alpha|^2 - \cancel{\frac{1}{4}} \right) = \hbar^2\omega^2 |\alpha|^2$$

$$\Rightarrow \Delta E = \hbar\omega|\alpha|$$

$$\frac{\Delta E}{\langle E \rangle} = \frac{\hbar\omega\,|\alpha|}{\hbar\omega\left(|\alpha|^2+1/2\right)} \longrightarrow 0 \qquad |\alpha| \to \infty$$

énergie mieux définie ∞ grd

Autre méthode $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$

$$\langle H^2\rangle_\alpha = \hbar^2\omega^2\langle\alpha|(\hat{a}^+\hat{a}+1/2)^2|\alpha\rangle = \hbar^2\omega^2\langle\alpha|(\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\hat{a}+\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{4})|\alpha\rangle$$

$[a,a^+]=1$

$$\text{or } \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+\hat{a} = \hat{a}^+(\hat{a}\hat{a}^+)\hat{a}$$
$$= \hat{a}^+(1+\hat{a}^+\hat{a})\hat{a}$$
$$= \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}$$

$$\langle H^2\rangle_\alpha = \hbar^2\omega^2\left(\langle\alpha|\hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\hat{a}|\alpha\rangle + 2\langle\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha\rangle + \frac{1}{4}\langle\alpha|\alpha\rangle\right)$$
$$= \hbar^2\omega^2\left(|\alpha|^4 + 2|\alpha|^2+\frac{1}{4}\right) \text{ comme précédemment.}$$