UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

M1 Sciences de l'univers et technologies spatiales

année 2020/2021

EXAMEN TERMINAL de compléments de mécanique quantique EMSUA1B1

Session du 23 septembre 2020

Durée : 1h30 - Tous documents interdits

Questions de cours :

- Donner les expressions des équations de Schrödinger stationnaire et non stationnaire ; démontrer l'expression du terme de phase temporelle dans la solution de cette dernière pour un espace unidimensionnel x.
- A l'aide de l'équation aux valeurs propres impliquant la composante du moment cinétique orbital suivant les z que l'on explicitera, démontrer le caractère factorisable de l'harmonique sphérique $Y_l^m(\theta, \varphi)$; préciser l'expression du terme en φ. On rappelle qu'en coordonnées sphériques cette composante vaut $L_z = -i\hbar\, \partial / \partial\varphi$.

Exercice : atome d'Hydrogène

Un atome d'Hydrogène dans l'état fondamental a pour fonction d'onde $\Psi = A \exp(-r / a_0)$ avec $1 / a_0 = me^2 / 4\pi\varepsilon_0\hbar^2$.

1. Normer cette fonction d'onde en précisant l'expression de A.
2. A quelles valeurs propres des opérateurs L^2 et L_z correspond-elle ?
3. Donner les expressions des moyennes $<\varepsilon_k>$ et $<\varepsilon_p>$, respectivement énergies cinétique et potentielle.

Exercice : oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique auquel on associe les opérateurs d'échelle a et a^+, respectivement d'annihilation et de création, dont on rappelle l'action sur les kets propres $|v>$ du Hamiltonien H : $a\,|\,v> = \sqrt{v}\,|\,v-1>$ et $a^+|\,v> = \sqrt{v+1}\,|\,v+1>$.

L'état fondamental $|\,0>$ a un statut particulier au sens où il est ket propre de a avec une valeur propre associée nulle ; ceci n'est pas le cas des autres états stationnaires $|\,v>$. Dans l'exercice, on se propose d'étudier le cas des états propres $|\,\alpha>$ de l'opérateur a, appelés états cohérents, et qui sont donnés par $a\,|\,\alpha> = \alpha\,|\,\alpha>$.

1. Utiliser la base $\{|\,v>\}$ pour établir la relation de récurrence simple entre les coefficients c_v selon $c_{v+1} = \alpha\frac{c_v}{\sqrt{v+1}}$. Réécrire cette relation entre c_v et c_0, pour finalement montrer que $|\,\alpha>$ se met sous la forme $|\,\alpha> = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\alpha^v}{\sqrt{v!}}\,|\,v>$.
2. Etablir littéralement la probabilité $P_\alpha(v)$ pour que l'oscillateur contienne v excitations élémentaires lorsqu'il est dans un état $|\,\alpha>$. On exprimera cette quantité en fonction de v et de $<N> = <\alpha\,|N|\,\alpha>$, valeur moyenne de l'opérateur $N = a^+a$ dans l'état cohérent $|\,\alpha>$.
3. Montrer que l'écart type $\Delta N = \sqrt{<N>}$.
4. Vérifier que les états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux.