Questions de cours

- $$H\psi_{(x,t)} = E\psi_{(x,t)}$$
$$H\psi_{(x,t)} = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\phi(t) \Rightarrow H\varphi(x)\phi(t) = i\hbar\frac{\partial(\varphi(x)\phi(t))}{\partial t}$$
$$= i\hbar\varphi(x)\frac{\partial\phi(t)}{\partial t} = E\varphi(x)\phi(t)$$
donc $i\hbar\frac{\partial\phi(t)}{\partial t} = E\phi(t)$

soit finalement $\phi(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

- $$L_z Y_\ell^m(\theta,\varphi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$
$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \Rightarrow L_z Y_\ell^m(\theta,\varphi) = -i\hbar\frac{\partial Y_\ell^m(\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = m\hbar Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$
$\Rightarrow$ partie en θ factorisable $Y_\ell^m(\theta,\varphi) = F_\ell^m(\theta)e^{im\varphi}$

expression en φ

6|1 1) $\Psi_{100} = A \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$; $a_0 = \frac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}$

normation : $A^2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) . 4\pi r^2\, dr = 1 \rightarrow A = \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{1/2}$

2) Valeurs propres de $\hat{L}_z$ et $\hat{L}^2$ correspondantes : 0 car Ψ_{100} ne dépend que de r.

3) Energie cinétique et potentielle moyennes :

$$\langle E_p \rangle = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \Psi^* \frac{e^2}{r} \Psi . 4\pi r^2\, dr$$

$$= -\frac{e^2}{\varepsilon_0 \pi a_0^3} \int_0^\infty r \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) . dr = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0}$$

$$E = \langle E_p \rangle + \langle Ec \rangle = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}$$

$$\rightarrow \langle Ec \rangle = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}$$

1) Écrivons l'état cohérent $|\alpha\rangle$ dans la base $\{|n\rangle\}$: $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ avec des coefficients complexes c_n inconnus.

Alors : $\hat{a}\sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\sqrt{n+1}\,|n\rangle$ qui, s'il est pris égal à $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n |n\rangle$, conduit à la relation de récurrence $c_{n+1} = \alpha\frac{c_n}{\sqrt{n+1}}$, c'est-à-dire aussi : $c_n = \alpha^n \frac{c_0}{\sqrt{n!}}$.

Reste ensuite à déterminer c_0 en imposant que les états cohérents sont normés à un : $1 = \| |\alpha\rangle \| = \sqrt{|c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}} = |c_0| e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}$ en reconnaissant l'expression en série d'une exponentielle. Il suffit alors de « choisir » c_0 réel positif pour obtenir l'expression recherchée.

2)

$$P_\alpha(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-\langle N\rangle}\frac{\langle N\rangle^n}{n!}$$

avec $\langle N\rangle = \langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = \|\hat{a}|\alpha\rangle\|^2 = |\alpha|^2$ la valeur moyenne du nombre d'excitations dans un état cohérent.

3) $\triangle N = \sqrt{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2}$ mais $\langle N^2\rangle = \left\langle \alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\right\rangle = |\alpha|^2\left\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\right\rangle$ en utilisant le fait que $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ et sa version conjuguée $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|$. Ensuite, il faut utiliser la relation de commutation $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$ entre $\hat{a}^\dagger$ et $\hat{a}$: $\langle N^2\rangle = |\alpha|^2\left\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|\alpha\right\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2$, d'où $\triangle N = \sqrt{|\alpha|^4 + |\alpha|^2 - |\alpha|^4} = |\alpha| = \sqrt{\langle N\rangle}$.

On peut également montrer que les états cohérents atteignent « tous » la limite de Heisenberg avec $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ et $\Delta p_x = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$.

4) $\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-\left(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\alpha^*\beta\right)/2} \neq \delta(\alpha-\beta)$ En revanche, les états cohérents forment une famille (sur-)complète d'état : $\int \frac{d\alpha}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1}$ qui peut être utilisée pour définir une mesure POVM comme celles décrites à la section 6 du chapitre 4.