<u>Question de cours</u>

- Opérateur hermitique $A = A^\dagger$ et $\langle \varphi | A | \chi \rangle = \langle \chi | A | \varphi \rangle^*$
- Opérateur de projection $P_i = |u_i\rangle\langle u_i|$ et $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$
- $E_n^{(1)} = \langle \varphi_n^0 | W | \varphi_n^0 \rangle$

a)

De façon générale, voici comment les moments cinétiques S^2 et S_z agissent sur un état $|1/2, m\rangle$ (avec m=1/2 ou -1/2) :

$$S^2|1/2, m\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|1/2, m\rangle \qquad S_z|1/2, m\rangle = \hbar m|1/2, m\rangle$$

La représentation matricielle de S^2 est

$$\begin{aligned} S^2 &= \begin{pmatrix} \langle 1/2, 1/2|S^2|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, 1/2|S^2|1/2, -1/2\rangle \\ \langle 1/2, -1/2|S^2|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, -1/2|S^2|1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle 1/2, 1/2|\frac{3}{4}\hbar^2|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, 1/2|\frac{3}{4}\hbar^2|1/2, -1/2\rangle \\ \langle 1/2, -1/2|\frac{3}{4}\hbar^2|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, -1/2|\frac{3}{4}\hbar^2|1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et celle de S_z est

$$\begin{aligned} S_z &= \begin{pmatrix} \langle 1/2, 1/2|S_Z|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, 1/2|S_Z|1/2, -1/2\rangle \\ \langle 1/2, -1/2|S_Z|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, -1/2|S_Z|1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle 1/2, 1/2|\frac{\hbar}{2}|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, 1/2| -\frac{\hbar}{2}|1/2, -1/2\rangle \\ \langle 1/2, -1/2|\frac{\hbar}{2}|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, -1/2| -\frac{\hbar}{2}|1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Une autre façon de trouver la représentation matricielle de ces deux matrices est la suivante. On pose $S^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on l'applique aux états $|1/2, 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|1/2, -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$S^2|1/2, 1|2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|1/2, 1|2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{4}\hbar^2 \text{ et } c = 0$$

$$S^2|1/2, -1|2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|1/2, -1|2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ et } d = \frac{3}{4}\hbar^2$$

et de même pour S_z.

b)

On sait que $S_\pm|1/2, m\rangle = \hbar\sqrt{(1/2 \mp m)(1/2 \pm m + 1)}|1/2, m \pm 1\rangle$ et donc la reprsentation matricielle de $S_\pm$ est

$$\begin{aligned} S_+ &= \begin{pmatrix} \langle 1/2, 1/2|S_+|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, 1/2|S_+|1/2, -1/2\rangle \\ \langle 1/2, -1/2|S_+|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, -1/2|S_+|1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle 1/2, 1/2|0|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, 1/2|\hbar|1/2, 1/2\rangle \\ \langle 1/2, -1/2|0|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, -1/2|\hbar|1/2, 1/2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_- &= \begin{pmatrix} \langle 1/2, 1/2|S_-|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, 1/2|S_-|1/2, -1/2\rangle \\ \langle 1/2, -1/2|S_-|1/2, 1/2\rangle & \langle 1/2, -1/2|S_-|1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle 1/2, 1/2|\hbar|1/2, -1/2\rangle & \langle 1/2, 1/2|0|1/2, -1/2\rangle \\ \langle 1/2, -1/2|\hbar|1/2, -1/2\rangle & \langle 1/2, -1/2|0|1/2, -1/2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Afin de trouver la représentation matricielle de $\mathbf{S}$, il suffit de connaître les représentions matricielles de S_x, S_y et S_z. La dernière est déjà connue, quant aux deux autres, il suffit d'utiliser le fait que

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\hat{\imath} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\hat{\jmath} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\hat{k} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x\hat{\imath} + \sigma_y\hat{\jmath} + \sigma_z\hat{k})$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli.

Trouvons d'abord l'état à l'instant t. On se rappelle que l'évolution d'un état est donnée par

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle$$

De plus, si $|\psi\rangle$ est un état propre de H, alors

$$e^{-iHt/\hbar} |\phi\rangle = e^{-i\lambda t/\hbar} |\phi\rangle$$

où λ est la valeur propre associée à l'état propre $|\phi\rangle$. Pour connaître l'évolution de l'état $|\psi(0)\rangle$ il faut donc l'écrire en terme des vecteurs propres de l'Hamiltonien. Dans cet exercice, le travail est déjà fait puisque $|+-\rangle$ et $|-+\rangle$ sont les vecteurs propres de S_{1_z} et S_{2_z}. En effet

$$H|+-\rangle = \left(\omega_1 \frac{\hbar}{2} - \omega_2 \frac{\hbar}{2}\right) |+-\rangle$$

$$H|-+\rangle = \left(-\omega_1 \frac{\hbar}{2} + \omega_2 \frac{\hbar}{2}\right) |-+\rangle$$

Alors,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2} |+-\rangle + e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2} |-+\rangle\right)$$

Cet état est écrit dans la base découplée. Toutefois, on cherche à mesurer S^2. Il est donc plus simple d'écrire $|\psi(t)\rangle$ dans la base couplée. Pour cela, on se sert de la table des coefficients de Clebsh-Gordan :

		1	1	0	1
		1	0	0	-1
$1/2$	$1/2$	1	0	0	0
$1/2$	$-1/2$	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	0
$-1/2$	$1/2$	0	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$-1/2$	$-1/2$	0	0	0	1

À partir de la table, on sait que

$$|+-\rangle = |1/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0,0\rangle$$

$$|-+\rangle = |-1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0,0\rangle$$

Alors, l'état $|\psi(t)\rangle$ s'écrit dans la base découplée comme

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2} |+-\rangle + e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2} |-+\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2}(|1,0\rangle + |0,0\rangle) + e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2}(|1,0\rangle - |0,0\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{2} \left((e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2} + e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2}) |1,0\rangle + (e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2} - e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2}) |0,0\rangle\right) \\
&= \left(\frac{e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2} + e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2}}{2}\right) |1,0\rangle - i \left(\frac{e^{i(\omega_1-\omega_2)t/2} - e^{-i(\omega_1-\omega_2)t/2}}{2i}\right) |0,0\rangle \\
&= \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right) |1,0\rangle - i \sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right) |0,0\rangle \qquad (2)
\end{aligned}$$

Avec l'état écrit sous cette forme, on voit maintenant que si on mesure S^2 on trouvera

$$0 \quad \text{avec une probabilité} \quad \left|\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)\right|^2$$

$$2\hbar \quad \text{avec une probabilité} \quad \left|\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)\right|^2$$

où $2\hbar^2 = s(s+1)\hbar^2$ quand $s = 1$.