UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

M1 Sciences de l'univers et technologies spatiales

année 2017/2018

EXAMEN TERMINAL de compléments de mécanique quantique EMSUA1B1

Session du 27 septembre 2017

Durée : 1h30 - Tous documents interdits

Questions de cours : Atome d'hydrogène

- Exprimer la décomposition d'un bra $\langle \Psi|$ dans la base des bras $\langle u_i|$ et donner sa représentation matricielle avec les coefficients associés.
- Qu'est-ce qu'un harmonique sphérique, comment cela se note-t-il et quelles sont ses applications ?
- Comment relie-t-on un moment dipolaire magnétique aux caractéristiques d'une boucle de courant circulaire i ?

Exercice : Atome d'hydrogène

1. En mécanique quantique, le théorème du *Viriel* entre valeurs moyennes de l'énergie cinétique T et potentielle V est donné par $\langle 2T\rangle = \alpha \langle V\rangle$, avec α l'exposant de la coordonnée d'espace apparaissant dans l'expression de l'énergie potentielle. Donner l'expression littérale de V dans le cas de l'atome d'hydrogène, en ayant préalablement posé $e^2 = q^2/(4\pi\varepsilon_0)$. On rappelle la valeur numérique de $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\text{x}10^9$. Déduire la valeur de α.

   On peut alors montrer, *mais cela n'est pas demandé ici,* que la règle de Bohr-Sommerfeld permet alors d'accéder à l'énergie quantifiée E_n de l'atome d'hydrogène et que cette dernière est donnée par $E_n = nfh\dfrac{\alpha+2}{2\alpha}$, avec f la fréquence du mouvement classique de l'électron et h la constante de Planck.

2. Exprimer la relation liant cette fréquence f aux paramètres e^2, r distance proton – électron et μ masse réduite de l'atome d'hydrogène. On pourra, par exemple, utiliser la relation fondamentale de la dynamique.
3. A l'aide du théorème du Viriel classique, exprimer $E_n = \langle T\rangle + \langle V\rangle$ en fonction des seuls e^2 et r, puis réexprimer f en fonction de E_n, μ et e^2. Conclure quant aux expressions littérales de E_n et r_n (rayon classique quantifié) fonction de μ, e^2, $\hbar$ et n.
4. Calculer numériquement la constante de Rydberg $R_H = (\mu e^4)/(4\pi\hbar^3 c)$ ainsi que le rayon de Bohr a_0 sachant que la masse de l'électron vaut $m_e \sim m_p/1836 \sim 9{,}1\text{x}10^{-31}$ kg, la charge du proton $q = +1{,}602\text{x}10^{-19}$ C, la constante de Planck $h = 6{,}62\text{x}10^{-34}$ Js et la célérité de la lumière dans la vide $c = 3\text{x}10^8$ ms^{-1}.
5. Estimer directement la valeur de l'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène à partir des inégalités d'Heisenberg.