UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

année 2017/2018

M1 Sciences de l'univers et technologies spatiales

EXAMEN TERMINAL de compléments de mécanique quantique EMSUA1B1

Session du 26 juin 2018

Durée : 1h30 - Tous documents interdits

Questions de cours :

- A quelle condition un opérateur A est-il hermitique ?
- Soit P_i l'opérateur de projection. Rappeler sa définition dans la base $|u_i>$ et donner la relation de fermeture.
- Rappeler la correction à l'ordre 1 de l'énergie pour une perturbation stationnaire W d'un état non-dégénéré.

Exercice OPERATEUR D'EVOLUTION D'UN SPIN 1/2

On considère un spin ½, de moment magnétique $\boldsymbol{M} = \gamma \boldsymbol{S}$, plongé dans un champ magnétique $\boldsymbol{B_0}$ de composante $B_x = -\omega_x / \gamma$, $B_y = -\omega_y / \gamma$, $B_z = -\omega_z / \gamma$. Le terme d'interaction magnétique vaut alors $W = -\boldsymbol{M}.\boldsymbol{B}_0$. On pose $\omega_0 = -\gamma |\boldsymbol{B}_0|$.

1. Montrer que l'opérateur d'évolution de ce spin s'écrit $U(t,0) = \exp(-iMt)$ avec $M = \frac{1}{\eta}\left[\omega_x S_x + \omega_y S_y + \omega_z S_z\right]$.

   Calculer la matrice représentant $M = \frac{1}{2}\left[\omega_x \sigma_x + \omega_y \sigma_y + \omega_z \sigma_z\right]$ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ des vecteurs propres de S_z. On rappelle que $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont les trois matrices de Pauli.

   Montrer enfin que $M^2 = \frac{1}{4}\left[\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right] = \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2$.

2. Mettre l'opérateur d'évolution sous la forme $U(t,0) = \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - \frac{2i}{\omega_0} M \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$. On rappelle les relations $\cos(x) = \sum_n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(x) = \sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Expliciter la matrice $U(t,0)$ correspondante.

3. On considère un spin qui à l'instant $t = 0$ est dans l'état $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle$.

   Montrer que la probabilité $P_{++}(t)$ que l'on a de le trouver à l'instant t dans l'état $|+\rangle$ est donnée par $P_{++}(t) = |\langle + | U(t,0) | + \rangle|^2$, et établir la relation $P_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$.

   Interprétation géométrique.