UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

M1 Sciences de l'univers et technologies spatiales

année 2016/2017

EXAMEN TERMINAL de compléments de mécanique quantique EMSUA1B1

Session du 30 juin 2017

Durée : 2h - Tous documents interdits

Questions de cours

- Qu'est-ce qu'un opérateur hermitique A ?
- Exprimer l'opérateur unidimensionnel énergie cinétique T.
- Quelle relation lie le moment magnétique orbital et le moment cinétique orbital ? Expliciter les paramètres mis en jeu.
- Quel résultat important l'expérience de Stern et Gerlach a-t-elle permis de mettre en évidence ?

Exercice : oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique à une dimension est constitué par une particule de masse m et d'énergie potentielle $V(X)=\frac{1}{2}m\omega^2X^2$. En introduisant les observables $X'=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ et $P'=\frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}}$ ainsi que les opérateurs d'annihilation a et de création a^+, tels que $a=\frac{X'+iP'}{\sqrt{2}}$ et $a^+=\frac{X'-iP'}{\sqrt{2}}$, le hamiltonien peut s'écrire $H=\hbar\omega(a^+a+1/2)$ (avec $[a,a^+]=1$). On se propose ici d'étudier les états propres $|\alpha\rangle$ de l'opérateur a : $a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$.

1. On décompose $|\alpha\rangle$ sur la base $\{|n\rangle\}$ des états propres de H : $|\alpha\rangle=\sum_n C_n|n\rangle$. En utilisant la relation de récurrence $a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$, montrer que pour toute valeur de α complexe, il existe une autre relation de récurrence entre les coefficients C_n, ce qui permet de les calculer tous à partir de C_0. En déduire qu'il existe un état propre $|\alpha\rangle$ de a quel que soit α.
2. Calculer les coefficients C_n en normalisant $|\alpha\rangle$.
3. Quelle est la probabilité de trouver $E_n=(n+1/2)\hbar\omega$ lors d'une mesure de l'énergie sur l'état $|\alpha\rangle$.
4. Calculer la valeur moyenne de l'énergie.
5. On suppose qu'à l'instant t = 0, l'oscillateur est dans un état $|\alpha\rangle$. Montrer qu'à chaque instant t ultérieur, il est dans un autre état propre $|\alpha(t)\rangle$ de l'opérateur a.