Questions de cours

- Hermitique ; opérateur coïncidant avec son adjoint $\Leftrightarrow A = A^+$

- $T = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$; $\hbar$ cste de Planck réduite telle que $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ / m masse de la particule

- Relation entre moments : $\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$; q charge électrique / m masse de la particule

- Stern et Gerlach $\Rightarrow$ mise en évidence de la quantification spatiale du m^t magnétique

Oscillateur harmonique

1) $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ base $|n\rangle$

récurrence $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$

$$\begin{cases} \hat{a}|\alpha\rangle = \hat{a}\sum_n c_n|n\rangle = \sum_n c_n \hat{a}|n\rangle = \sum_n c_n\sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle = \alpha\sum_n c_n|n\rangle \end{cases}$$

Multiplions par le bras $\langle m|$: $\alpha\sum_n c_n \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{mn}} = \sum_n c_n\sqrt{n}\,\underbrace{\langle m|n-1\rangle}_{\delta_{m\,n-1}}$

$\delta=1$ $m=n$; $\delta=1$ $m=n-1$ ou $n=m+1$

$\alpha\, c_m = c_{m+1}\sqrt{m+1}$

soit $c_{m+1} = \frac{\alpha c_m}{\sqrt{m+1}}$ relation de récurrence

ou $c_n = \frac{\alpha c_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n-1}}c_{n-2}\right) \cdots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0$ premier coefficient

2pts

2) Normalisation $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = \sum_n |c_n|^2 \underbrace{\langle n|n\rangle}_{1 \text{ base orthonormée}} = \sum_n |c_n|^2 = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}|c_0|^2$

$= |c_0|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2} = 1$

$\Rightarrow |c_0|^2 = \frac{1}{e^{|\alpha|^2}} = e^{-|\alpha|^2}$

soit $|c_0| = e^{-|\alpha|^2/2}$

2pts

$\Rightarrow$ Etat propre $|\alpha\rangle$ de $\hat{a}$ quelque soit α $|c_0|^2$

3) Probabilité de mesure $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$: $P_n = |c_n|^2 = \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}$

1pt

4) Valeur moyenne de l'énergie

$$\langle \hat{H} \rangle_\alpha = \langle E \rangle = \sum_n P_n E_n = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} (n+1/2)\hbar\omega$$

$n! = n(n-1)!$ $\quad$ 1pt pour 1 des 2 méthodes

$$= \sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} n\hbar\omega + \underbrace{\sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!}}_{=1} \frac{\hbar\omega}{2}$$

$|\alpha|^{2n-2+2}$

$$= \sum_n \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{(n-1)!} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= |\alpha|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2(n-1)} e^{-|\alpha|^2}}{(n-1)!} \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= |\alpha|^2 \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + 1/2\right)$$

Autre méthode $\quad \hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)$

$$\langle \hat{H} \rangle_\alpha = \hbar\omega \langle \alpha | (\hat{a}^+\hat{a} + \tfrac{1}{2}) | \alpha \rangle$$

$$= \hbar\omega \underbrace{\langle \alpha | \hat{a}^+ \hat{a} | \alpha \rangle}_{\alpha^* \langle \alpha | \ \alpha | \alpha \rangle} + \frac{\hbar\omega}{2} \underbrace{\langle \alpha | \alpha \rangle}_{=1}$$

$$= \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + \tfrac{1}{2}\right)$$

5) $$|\alpha(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |n\rangle \quad \text{avec } c_n = \frac{\alpha^n e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}$$

2pts

$$= \sum_n \frac{\alpha^n e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+1/2)\frac{\hbar\omega t}{\hbar}} |n\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} e^{-in\omega t} e^{-\frac{i\omega t}{2}} |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} e^{-in\omega t} |n\rangle$$

Posons $\alpha' = \alpha e^{-i\omega t} \Leftrightarrow \alpha'^n = \alpha^n e^{-in\omega t}$

et $|\alpha'| = |\alpha|$

soit $$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \underbrace{\sum_n \frac{\alpha'^n}{n!} e^{-|\alpha'|^2/2} |n\rangle}_{|\alpha'\rangle \Rightarrow \text{état propre de } \hat{a}} = e^{-\frac{i\omega t}{2}} |\alpha'\rangle$$