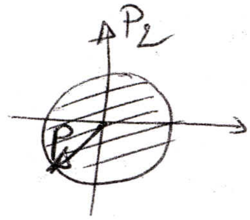
- Partiel Novembre 2007 -

I 1) 1 $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p^2}{2m} = E_1 + E_2$

2) 1 $\{x_1, x_2 ; p_1, p_2\}$ 1 dimension 4

3) $\Gamma(q,p) = \Gamma(q)\,\Gamma(p) = \iint dx_1\,dx_2 \iint dp_1\,dp_2$

$= \int dx_1 \int dx_2 \iint dp_1\,dp_2 = \left(\int_0^L dx\right)^2 \underbrace{\iint dp_1\,dp_2}_{\frac{p^2}{2m} \leq E}$



$p = \sqrt{2mE}$ $\qquad dp = \frac{1}{2}\sqrt{2m}\,E^{-1/2}\,dE$

$p^2 = 2mE$

$\Gamma(q,p) = L^2 \pi p^2$ 2 surface disque

4) $(\Delta q\,\Delta p) = (\Delta x_1\,\Delta p_1)(\Delta x_2\,\Delta p_2) = h^2$ 1

5) $\phi_2(E) = \frac{\Gamma(q,p)}{(\Delta q\,\Delta p)} = \frac{L^2 \pi p^2}{h^2} = \frac{L^2 \pi\, 2m}{h^2} E$ 1

6) $\Omega_2(E) = L^2 \iint\limits_{E \leq \frac{p^2}{2m} \leq E+dE} dp_1\,dp_2 \;/\, h^2$

$\Omega_2(E) = \frac{L^2\, 2p\pi\, dp}{h^2}$ couronne sphérique $= \frac{L^2\, 2\pi\, (2mE)^{1/2}}{2h^2}(2m)^{1/2} E^{-1/2} dE$ dp.

$= \frac{L^2 \pi (2m)\, dE}{h^2} = \frac{2m\pi L^2}{h^2} dE$ 2

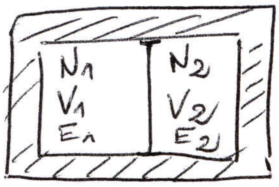
ou $\Omega_2(E) = \phi_2(E+dE) - \phi_2(E) = \frac{\partial \phi_2(E)}{dE} dE$

$\Omega_2(E) = \frac{2m\pi L^2}{h^2} dE$ indépendant de E

7) $P_2(E) = \frac{\partial \phi_2(E)}{dE} = \frac{2m\pi L^2}{h^2}$ 1

II)

1) $m_1 \neq m_2$ discernables



$$E = E_1 + E_2$$
$$N = N_1 + N_2$$

à l'équilibre thermique et mécanique

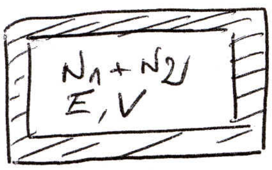
$$E_{1m} = \frac{N_1}{N} E \quad , \quad E_{2m} = \frac{N_2}{N} E \qquad \left\{ T_1^* = T_2^* \right.$$

$$V_{1m} = \frac{N_1}{N} V \quad , \quad V_{2m} = \frac{N_2}{N} V \qquad \left\{ \frac{P_1^*}{T_1^*} = \frac{P_2^*}{T_2^*} \right.$$

$$\frac{E_{1m}}{N_1} = \frac{E_{2m}}{N_2} = \frac{E}{N} \quad , \quad \frac{V_{1m}}{N_1} = \frac{V_{2m}}{N_2} = \frac{V}{N}$$

$$S_i^{*D}(E, V, N_1, N_2) = N_1 k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln\left[\left(\frac{m_1}{3\pi\hbar^2}\right)\left(\frac{E_{1m}}{N_1}\right)\right] + \ln(V_{1m}) + \frac{3}{2} \right\}$$
$$+ N_2 k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln\left[\left(\frac{m_2}{3\pi\hbar^2}\right)\left(\frac{E_{2m}}{N_2}\right)\right] + \ln(V_{2m}) + \frac{3}{2} \right\}$$

$$S_i^{*D} = N_1 k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln\left(\frac{m_1}{3\pi\hbar^2}\right) + \frac{3}{2} \ln \frac{E}{N} + \ln\left(V \frac{N_1}{N}\right) + \frac{3}{2} \right\}$$
$$+ N_2 k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln\left(\frac{m_2}{3\pi\hbar^2}\right) + \frac{3}{2} \ln \frac{E}{N} + \ln\left(V \frac{N_2}{N}\right) + \frac{3}{2} \right\}$$



$$\cancel{S_f^{*D} = (N_1 + N_2) k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln\left(\frac{m_1}{3\pi\hbar^2} \frac{E}{N}\right) + \ln V + \frac{3}{2} \right\}}$$

$$S_f^{*D} = N_1 k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{m_1}{3\pi\hbar^2} + \frac{3}{2} \ln \frac{E}{N} + \ln V + \frac{3}{2} \right\}$$
$$+ N_2 k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{m_2}{3\pi\hbar^2} + \frac{3}{2} \ln \frac{E}{N} + \ln V + \frac{3}{2} \right\}$$

$$\Delta S^{*D} = - N_1 k_B \ln \frac{N_1}{N} - N_2 k_B \ln \frac{N_2}{N}$$

2 $$= k_B \left\{ N_1 \ln \frac{N_1 + N_2}{N} + N_2 \ln \frac{N_1 + N_2}{N} \right\}$$

{ entropie de mélange 1 indépendante de m_1 et m_2

$\Delta S^* > 0$, enlever la paroi mobile, c'est relaxer ~~une~~ contrainte $\Rightarrow$ on augmente le nb d'états accessibles donc l'entropie

1

2) $m_1 = m_2 = m$ discernables

$$\Delta S^{*D} = k_B \left\{ N_1 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_1} + N_2 \ln \frac{N_1 + N_2}{N_2} \right\}$$ 1

$\Delta S^{*D} > 0$ inadmissible !! 1

enlever (ou remettre) la cloison mobile ne change rien au mélange de molécules du même gaz. Le nb d'états accessibles et donc l'entropie ne doivent pas changer $\Delta S^{*D} = 0$ $(m_2 = m_1)$ 1

"paradoxe de Gibbs"

il faut modifier l'expression de l'entropie microcanonique du gaz parfait sans remettre en cause l'entropie de mélange de deux gaz différents.

3) $m_1 = m_2 = m$ mais indiscernables

$$S^{*ID} = k_B \ln \Omega^{*ID} = k_B \ln \left(\frac{\Omega^{*D}}{N!} \right)$$

$$S^{*ID} = k_B \ln \Omega^{*D} - k_B \ln N!$$

$$S^{*ID} = S^{*D} - k_B \ln N! = N k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m}{3\pi\hbar^2} \frac{E}{N} \right) + \ln V + \frac{3}{2} - \ln N + 1 \right\}$$

$$S^{*ID} = N k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln \left(\frac{m}{3\pi\hbar^2} \frac{E}{N} \right) + \ln \left(\frac{V}{N} \right) + \frac{5}{2} \right\}$$ 1 Sackur-Tetrode

$$\Delta S^{*ID} = N_1 k_B \ln \frac{N}{N_1} + N_2 k_B \ln \frac{N}{N_2} = \Delta S^{*D}$$ 1

pour 2 gaz de nature $\neq$

mais $\Delta S^{*ID} = 0$ pour 2 gaz de même nature à molécules indiscernables

$\Rightarrow$ mélange de 2 gaz de même nature entropie conservée et l'entropie de l'ensemble est la somme des entropies, S^{*ID} est extensive 1