UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence de Sciences Physiques et Chimiques

Année Universitaire 2010 – 2011

THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE- EXAMEN Juin 2011 –Session 2

(Durée 2 h)

I. Question de cours : Gaz parfait en description canonique

On considère un gaz parfait de N molécules **indiscernables**, de masse m, sans interactions entre elles, en équilibre avec un thermostat à la température T. On tient compte que des mouvements de translation des molécules qui peuvent être décrits de manière classique.

1. Donner l'énergie de translation ε_t d'une molécule.

2. Etablir l'expression de la fonction de partition z_t d'une molécule de gaz parfait.

3. En déduire la fonction de partition Z_t des mouvements de translation du gaz parfait à la température T. Calculer l'énergie libre F du gaz parfait.

4. Calculer alors l'énergie moyenne $<E_t>$ et la pression canonique p^c du gaz parfait. Retrouver l'équation d'état du gaz parfait. Retrouver en utilisant le théorème d'équipartition de l'énergie l'expression de $<E_t>$.

Rappel : $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

II. Diffusion de molécules à travers une membrane

Soit une membrane poreuse de surface S, de **faible épaisseur** L, comportant p pores cylindriques identiques par unité de surface. Cette membrane sépare deux compartiments 1 et 2 cylindriques de même axe Ox et de volume constant respectif V_1 et V_2 contenant la même solution moléculaire mais à des concentrations différentes n_1 et n_2 avec $n_1 > n_2$. Dans chacun des pores de la membrane s'établit un flux de molécules suivant Ox, donné par la loi de Fick. On note $n(x,t)$ la concentration moléculaire à travers un pore à l'abscisse x et à l'instant t et D le coefficient de diffusion supposé uniforme.

On admet que dans un pore la concentration moléculaire est une fonction affine de l'abscisse x : $n(x,t) = A(t)\ x + B(t)$. A chaque instant t, les concentrations $n_1(t)$ et $n_2(t)$ restent uniformes dans chacun des compartiments. On note $\Delta n(t) = n_1(t) - n_2(t)$ l'écart des concentrations au temps t.

1. Enoncer la loi de Fick en précisant les grandeurs physiques introduites et leurs unités SI.

2. Déterminer le flux de molécules Φ_p à travers un pore de longueur L et de rayon R. L'épaisseur L de la membrane étant considérée comme très faible, à quelle expression peut-on assimiler $dn_V(x, t)/\ dx$?

3. Montrer que le flux de molécules Φ_m à travers toute la membrane a pour expression : $\Phi_m = -K \Delta n(t) S$ où K est la perméabilité de la membrane ? Déterminer l'expression de K en fonction de p, D et L. Calculer numériquement le rayon R d'un pore en µm, on donne $K = 10^{-6}$ m s^{-1}, $D = 10^{-9}$ SI, L= 10 µm, $p = 10^6$ pores cm^{-2}.

4. Donner les variations des nombres de particules $dN_1(t)$ et $dN_2(t)$ respectivement dans les compartiments 1 et 2 entre les instants t et $t + dt$.

5. Etablir l'équation différentielle de diffusion à laquelle obéit Δn(t) en posant $1/\tau = (1/V_1 + 1/V_2) K S$. On notera $\Delta n(t=0) = \Delta n_0$. Intégrer cette équation et montrer que $\Delta n(t)$ est de la forme $C \exp(-\alpha t)$. Expliciter C et α. Calculer le temps t_1 au bout duquel $\Delta n(t=t_1) = \Delta n_0/10$.

III. Conduction thermique.

On considère un milieu continu, homogène et isotrope, caractérisé par sa conductivité thermique λ_1. Ce milieu est contenu dans un cylindre d'axe Ox, délimité par les plans A (x=0) et B (x=L_1) de section S. On considère que la surface latérale du cylindre est parfaitement isolée thermiquement de l'extérieur. Les plans A et B sont mis en contact avec deus sources d'énergie interne (sources de chaleur) imposant respectivement les températures T_A (constante dans le plan A et T_B (constante dans le plan B). Après un temps t suffisamment long, le régime permanent de diffusion thermique est établi.

1. Etablir l'expression de $T(x)$ dans le cylindre en fonction de x, T_A, T_B, et de L_1. Représenter la courbe $T(x)$ lorsque T_A= 100°C et T_B=0°C. On précisera la valeur de $T(x=L_1/2)$.
2. Exprimer, en utilisant la loi de Fourier, le flux d'énergie interne I_U (flux thermique) qui traverse la base de section S du cylindre de longueur L_1, orientée par $\mathbf{e}_x$.
3. Définir alors la résistance thermique R_{th} du cylindre, donner son expression et préciser son unité.

On met maintenant en contact en x= 0 deux cylindres de même section S, de même axe Ox, de longueur L_1 et L_2 mais de conductivité thermique différente λ_1 et λ_2. On maintient les extrémités $x=-L_1$ et $x=+L_2$ aux températures T_1 et T_2. On considère que le régime stationnaire est établi.

4. A l'aide du résultat de la question 1., donner l'expression de T(x) dans chacun des cylindres en fonction de T_1 , T_2 , x, L_1, L_2 et de $T(x=0)=T_0$. En déduire que la température à l'interface T_0 est le barycentre de T_1 et T_2 affectées des poids statistiques $\alpha_1=\lambda_1/L_1$ et $\alpha_2=\lambda_2/L_2$.

On donne T_1=37°C, T_2=20°C, λ_1= 100 W.m^{-1}.K^{-1} (acier) ou 1 W.m^{-1}.K^{-1} (bois) et λ_2= 10 W.m^{-1}.K^{-1} (corps humain) et on suppose que $L_1=L_2$. La mise en contact thermique des deux cylindres de conductivité thermique différente simule la sensation de chaud lorsque la main d'un observateur touche par exemple une table métallique ou une table en bois.

5. Calculer la température de contact $\mathbf{T_0}$ pour un contact main-bois, puis pour un contact main-acier. Commenter.