UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence Sciences Physiques et Chimiques- L3

Année Universitaire 2011–2012

Thermodynamique Statistique

Examen Mai 2012 (Durée 2h00)

I. Etude d'un gaz parfait soumis à une force centrifuge

On considère un gaz parfait monoatomique enfermé dans une centrifugeuse (cylindre de hauteur *L*, de rayon *R* et d'axe de révolution vertical *Oz*). Ce gaz, constitué de *N* atomes **indiscernables** de masse *m,* est en situation canonique à la température *T*. Le cylindre est en rotation autour de Oz à la vitesse angulaire uniforme ω. L'énergie ε d'un atome en un point M (ρ, ϕ, z) du cylindre en rotation est $\varepsilon = \frac{p^2}{2m} - \frac{m\,\omega^2 \rho^2}{2}$ (On néglige l'effet du champ de pesanteur).

1. Donner la signification physique des deux termes de l'énergie ε.

2. Etablir l'expression de la fonction de partition z d'un atome de gaz parfait (On donne $\iiint exp(-ap^2)\, d^3 p = (\frac{\pi}{a})^{3/2}$).

3. Montrer que z se factorise sous la forme: $z = z_c\, z_p = (\frac{V}{\Lambda^3})(\frac{exp(\beta K)-1}{\beta K})$ où V est le volume du cylindre, $\beta = \frac{1}{k_B T}$, $K = \frac{m\omega^2 R^2}{2}$ et $\Lambda = \sqrt{\frac{\beta h^2}{2\pi m}}$ la longueur d'onde de Broglie.

4. En déduire la fonction de partition *Z* du gaz parfait soumis à une force centrifuge.

5. Calculer son énergie moyenne $<E>$. Montrer qu'elle est la somme de deux termes dont on précisera les expressions respectives. Donner sa valeur quand $\omega \to 0$. Commenter.

En situation canonique, la densité particulaire $n(\rho)$ (nombre moyen d'atomes par unité de volume situés à une distance de l'axe de rotation comprise entre ρ et $\rho + d\rho$) est de la forme: $n(\rho) = A exp(\frac{\beta m\omega^2 \rho^2}{2})$.

6. Déterminer le coefficient A en tenant compte du nombre $dN(\rho)$ d'atomes dans le cylindre creux de rayon ρ, d'épaisseur $d\rho$, et de volume $dV=2\pi\rho L d\rho$). Montrer que $n(\rho)$ se réduit à $\frac{N}{\pi R^2 L}$ quand $\omega \to 0$.

7. A partir de l'équation d'état du gaz parfait, montrer que la pression $p(\rho)$ du gaz s'écrit : $p(\rho) = p(0)\ exp(\frac{\beta K \rho^2}{R^2})$. Préciser l'expression de $p(0)$. Que vaut $p(\rho)$ quand $\omega \to 0$?

II. Injection d'un soluté dans une veine.

Une veine est schématisée par un tube horizontal d'axe $x'x$ et de très faible section S dans lequel s'écoule le sang à la vitesse d'entraînement constante $\vec{v_e} = v_e \overrightarrow{e_x}$ ($v > 0$). Au point O d'abscisse $x = 0$ on injecte goutte à goutte un soluté avec un débit tel que la concentration n_0 de soluté en ce point reste constante.

Soit $n(x, t)$ la concentration à la date t dans une section d'abscisse x. On note le vecteur courant volumique $\vec{J}_n$ dû à la diffusion du soluté dans le sang, le coefficient de diffusion D étant considéré comme constant. L'étude porte sur le phénomène de diffusion à contre-courant c'est-à-dire en tout point défini par une abscisse $x < 0$.

1. Rappeler la loi de Fick, pour une diffusion axiale, en précisant les grandeurs physiques introduites ainsi que leur unités SI. Rappeler la définition de $\vec{J}_n$ en fonction de n et $\vec{v_e}$.

2. Etablir, en fonction de J_n, S, dt et dx, le bilan du nombre dN de molécules de soluté pendant l'intervalle de temps dt pour la portion de veine comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

3. Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x, t)$. Résoudre cette équation en régime stationnaire et exprimer alors $n(x)$ en fonction de n_0, v_e, D et x ($x<0$). (On déterminera les constantes d'intégration en appliquant les conditions aux limites de n en $x=0$ et $x=-\infty$).

III. Conduction thermique dans un combustible nucléaire

Dans un barreau cylindrique d'uranium, utilisé comme combustible nucléaire, la puissance volumique (ou taux de production d'énergie interne) produite par les réactions nucléaires est σ_U=480 MW m^{-3}. La conductivité thermique de l'uranium est Λ= 30 Wm^{-1}K^{-1} et sa température de fusion est T_f= 1405 K. La surface latérale du barreau est maintenue à la température T_s= 443 K. On cherche à déterminer la distribution de la température dans le barreau **en régime stationnaire** et en fonction de sa géométrie. Le barreau est un cylindre plein homogène de rayon R=2 cm, de longueur L. On considère le barreau suffisamment long pour que la température T ne dépende que de r.

1. Rappeler la loi de Fourier de la diffusion thermique en précisant les grandeurs physiques introduites ainsi que leur unités SI. Donner l'expression du vecteur courant volumique d'énergie interne $\vec{J}_U$ et du flux d'énergie interne I_U dans le barreau.

2. Etablir, à l'aide du bilan de l'énergie interne U dans un volume V, l'équation différentielle de la diffusion thermique. (On rappelle $\rho u = \frac{U}{V}$ l'énergie interne volumique et $\rho = \frac{m}{V}$).

3. Montrer que la loi de variation de la température en tout point du combustible, à la distance r de l'axe, est de la forme $T(r) = A - B r^2$. Calculer les coefficients A et B. Faire l'application numérique. Que représente A ? Commenter les résultats. La géométrie du barreau est elle bien adaptée pour un tel combustible ?

4. Déterminer la puissance volumique maximale σ_{Umax} que l'on peut extraire du barreau si l'on ne veut pas dépasser sa température de fusion.

Le combustible occupe maintenant l'espace entre deux cylindres de rayons respectifs R_e= R=2 cm et R_i= 1 cm (tube creux). La surface intérieure du tube est recouverte d'un isolant parfait ($\Lambda_I \to 0$) et la surface extérieure est toujours maintenue à la température T_s= 443 K.

5. Montrer que le courant volumique d'énergie interne J_U, à une distance r de l'axe, s'écrit : $J_U = \frac{\sigma_U}{2}\left(r - \frac{R_i^2}{r}\right)$. En déduire le gradient de température $\frac{\partial T}{\partial r}$ dans le barreau.

6. Montrer que la nouvelle loi de variation de la température est de la forme: $T(r) = A' + C\,Ln\,r - B r^2$. Déterminer A' et C. Quelle est alors la valeur de la température maximale T_{max} atteinte dans le barreau ? Commenter.

On donne le Laplacien en coordonnées cylindriques:

$$\Delta f(r,\phi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$