UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence de Sciences Physiques et Chimiques

Année Universitaire 2010 – 2011

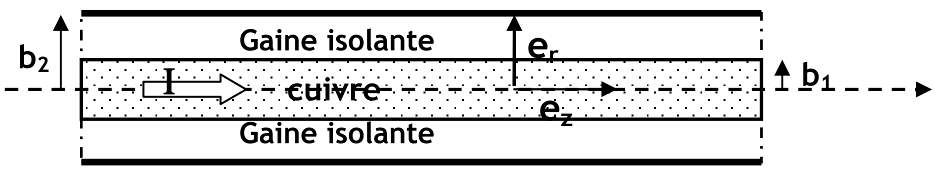
THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE- EXAMEN Janvier 2011

(Durée 2 h)

I. Conduction thermique à symétrie cylindrique et effet Joule.

Soit un fil cylindrique homogène de cuivre, d'axe z'z, de section S_1, de rayon b_1=1cm, supposé infiniment long (on négligera les effets de bord), de conductivité thermique λ_C =390 $W.m^{-1}.K^{-1}$et de résistivité électrique ρ_C=1.7 10^{-8} Ω.m. Ce fil de cuivre, de résistance R ($R=\rho_C L/S_1$), est parcouru par un courant électrique (uniformément réparti) d'intensité constante I= 300 A.

A. Le fil est enveloppé d'une gaine isolante, de conductivité thermique λ_i, de section S_2 et de rayon b_2= 2 b_1 et coaxiale au fil. La paroi externe de la gaine est maintenue à la température T_a=293 K. En **régime stationnaire,** la chaleur dissipée par effet Joule dans le cuivre traverse la gaine isolante.



1) Calculer la puissance σ_U produite par effet Joule dans une section de longueur L du fil de cuivre par unité de volume.

2) Donner l'expression du courant volumique d'énergie interne J_U (r) dans le fil pour $0 \leq r \leq b_1$.

3) Montrer qu'en **régime stationnaire**, l'équation différentielle dans le fil s'écrit : $\Delta T = -\dfrac{\sigma_U}{\lambda_C}$. Etablir la loi de variation de la température T(r) en fonction de $T(r=0)=T_0$, r, b_1, I, ρ_C et λ_C. (On retiendra une constante d'intégration qui assure que T(r=0) reste finie. Pourquoi le gradient de température dans le fil de cuivre est négligeable ?

4) Déterminer le flux thermique $I'_U(r)$ et le courant volumique d'énergie interne $J'_U(r)$ à travers la gaine isolante. Etablir la loi de variation de la température T(r) dans la gaine isolante pour $b_1 \leq r \leq b_2$ en fonction de T_a, r, b_1, b_2, I, ρ_C et λ_i. En déduire la température de la surface de contact métal-isolant $T(r=b_1)=T_c$.

5) On mesure T_C=298 K , déterminer la valeur de la conductivité thermique de l'isolant λ_i.

B. On remplace la gaine isolante par un conducteur en aluminium creux en aluminium de même section S_2, dans lequel on fait le vide. L'effet Joule échauffe le fil de cuivre de telle sorte que sa surface est portée à une température uniforme T_C. La chaleur se transmet par rayonnement à travers le vide jusqu'au conducteur métallique extérieur. La surface externe du conducteur métallique extérieur est toujours maintenue à la température T_a=293 K.

6) Etablir le bilan d'énergie rayonnée par la surface du fil vers le conducteur en aluminium en fonction de T_c, T_a, b_1, b_2, la constante de Stefan (σ= 5.67 10^{-8} $W.m^{-2}.K^{-4}$) et la longueur L de fil considérée. La surface du fil de cuivre (non oxydé) est un corps gris d'émissivité ε_1 = 0.88. On rappelle que l'émissivité ε_2 de l'aluminium est de 0.07. Déterminer la température T_C en fonction de T_a, b_1, b_2, σ_U et σ et donner sa valeur.

7) A quelle température se trouve la surface du fil cuivre lorsque on recouvre le conducteur creux en aluminium d'une laque en bakélite d'émissivité ε_2 = 0.93 ?

Rappels : Gradient, Divergence et Laplacien en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{e}_z \quad ; \qquad \text{div}\vec{J} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rJ_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial J_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \quad ;$$

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad ; \quad \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}\,T) = -\Delta T$$

II. Balance ultrasensible

Une balance ultrasensible est constituée d'un ressort à quartz suspendu à un support fixe. Lorsqu'on allonge le ressort d'une faible longueur x, une force de rappel de la forme –Kx (où K est la constante de raideur du ressort) apparait. La balance est placée dans un **thermostat qui impose sa température T** et soumise à une accélération de la pesanteur g. On suspend au ressort un objet de masse m.

1) Etablir l'énergie E du système [ressort+masse]. Donner l'expression de la probabilité dP(x) que l'élongation du ressort soit comprise entre x et x + dx en fonction de la fonction de partition Z, de m, g, K, $\beta=1/k_BT$ et x. Montrer que la somme sur tous les états d'élongation du ressort Z s'écrit : $Z = \exp\left(\frac{m^2g^2}{2Kk_BT}\right)\sqrt{\frac{2\pi k_BT}{K}}$ (on considèrera x comme une variable continue).

2) L'agitation thermique k_BT provoque des fluctuations de l'élongation du ressort x autour de sa valeur moyenne <x>. Montrer que la distribution $\omega(x)$ de l'élongation du ressort x est une distribution gaussienne. En déduire la valeur moyenne <x> et l'écart type σ de cette distribution en fonction de (m, g, K) et (k_B, T, K) respectivement.

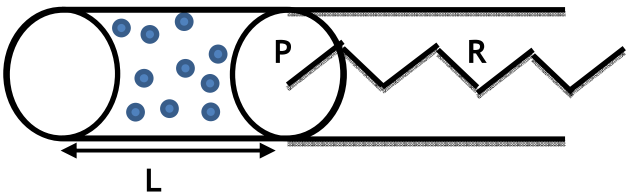
3) A cause des fluctuations de x, la pesée perd tout son sens si l'écart type σ= (Δx) atteint la valeur de l'élongation moyenne <x>. Quelle est alors la masse minimale m_{min} que l'on peut mesurer avec cette balance ?

Rappels : $[(x-a)^2-a^2]=(x^2-2ax)$; $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Distribution Gaussienne : $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{(x-<x>)^2}{2\sigma^2}]$ avec $\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\,dx = 1$

III. Gaz parfait + ressort en situation canonique

On considère N (N>>1) particules **indiscernables** de masse m d'un **gaz parfait** enfermées dans un cylindre semi-infini, de section S et délimité à droite par un piston mobile attaché à un ressort R également semi-infini. Lorsque le ressort est comprimé d'une longueur dL, l'énergie du ressort augmente de $\vec{f}.\vec{dL}$ où $\vec{f}$ est une force supposée constante. Le gaz et le ressort sont en contact thermique entre eux et également avec **un réservoir de température à la température T**. Le piston est mobile à l'intérieur du cylindre et la distance entre l'extrémité gauche du cylindre et le piston est notée L. Lorsque L=0, l'énergie du piston est nulle.



1) Décrire l'espace des phases du système [cylindre +gaz+ piston +ressort].

2) Pour une valeur de L donnée, calculer l'énergie E du système en fonction de f, L, m et les impulsions p_1, p_2,…, $\mathbf{p_i}$,…, p_N des N particules.

3) Calculer la fonction de partition $Z_{GP}(L)$ du gaz parfait classique pour une valeur de L donnée avec V=S L le volume macroscopique occupé par le gaz parfait.

4) Ecrire la fonction de partition Z du système [cylindre+gaz+piston+ressort] sous la forme d'une somme sur tous le états des N particules du gaz parfait pour une valeur L de L_j donnée (L_j=L) et d'une somme sur toutes les L_j. Montrer que Z pour expression : $Z = Z_{GP} \frac{N!}{L^N} (\frac{k_B T}{f})^{N+1}$ (on considérera pour faire ce calcul que L est une variable continue).

Montrer que la valeur moyenne de L s'écrit alors : $<L> = \frac{k_B T}{f}(N+1)$ (Pour simplifier le calcul on considèrera ici que L est une variable discrète).

Rappels : $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ $\int_{0}^{\infty} u^N \exp(-u)\,du = N!$