UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence de Sciences Physiques et Chimiques

Année Universitaire 2009 – 2010

THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE- EXAMEN Janvier 2010-

(Durée 2 h)

I. Question de cours : Diffusion thermique

Enoncer la loi de Fourier en explicitant les grandeurs physiques introduites et leurs unités.

II. Diffusion de neutrons dans un barreau

On s'intéresse à la diffusion **unidirectionnelle** de neutrons dans un barreau cylindrique d'axe *Ox* de section droite *S* et de longueur *L*. Cette diffusion satisfait à **la loi de Fick** avec un coefficient de diffusion *D* indépendant de *x*. On appelle $n_v(x, t)$ la densité particulaire à l'instant *t* et à l'abscisse *x*.

A. Diffusion sans termes de production

On considère dans un premier temps qu'il y a aucune absorption ou production de neutrons dans le barreau.

1. Etablir, entre les instants *t* et *t+dt*, le bilan du nombre neutrons compris entre les abscisses *x* et *x+dx*.
2. Etablir l'équation différentielle de diffusion vérifiée par $n_v(x, t)$.
3. On suppose le régime stationnaire atteint, déterminer $n_V(x)$. On exprimera $n_V(x)$ en fonction de *x*, *L* , $n_0=n_V(x=0)$ et de $n_L = n_V(x=L)$. Déterminer également le courant volumique de neutrons (ou densité de flux de neutrons) J_n.

B. Diffusion avec termes de production

On considère maintenant que le barreau peut absorber des neutrons et en produire par des réactions de fission. Le nombre de neutrons absorbés δN^a dans un volume *dV* pendant l'intervalle de temps *dt* est donnée par : $\delta N^a = \frac{n_V}{\tau} dV\, dt$ où τ est constante positive. Le nombre de neutrons produits dans le même volume élémentaire *dV* pendant *dt* est donné par : $\delta N^p = K\, \delta N^a$ où *K* est une constante positive.

1. En établissant le bilan du nombre de neutrons dans le volume de section *S* compris entre *x* et *x+dx*, montrer que $n_V(x, t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dn_V(x,t)}{dt} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 n_V(x,t)}{\partial x^2} + \frac{(K-1)}{\tau} n_V(x,t)$$

2. On suppose le régime stationnaire atteint, déterminer alors $n_V(x)$ dans le cas où K < 1 ($\delta N^p \langle \delta N^a$). On l'exprimera en fonction de x, n_o, K, D et τ. En déduire la longueur de diffusion L_d, longueur pour laquelle $n(L_d) = \frac{n_0}{e}$.

3. Exprimer directement $\vec{J}_n$ en fonction de n_V et de la vitesse moyenne d'entraînement $<\vec{v_e}>$ des neutrons. Etablir la relation entre $<\vec{v_e}>$, D et L_d.

Rappels : $N = \iiint_V n\, dV$; Théorème d'Ostrogradski: $\iint_S \overrightarrow{J_n}.\vec{n}\, dS = \iiint_V div(\overrightarrow{J_n})\, dV$

Equation différentielle : $ay''+by'+cy = 0$,	Equation caractéristique: $ar^2+br+c = 0$
i) solutions réelles r_1 et r_2 : $y(x) = A\exp(r_1x) + B\exp(r_2x)$	
ii) solutions complexes r_1 et r_2 : $y(x) = A\exp(ir_1x) + B\exp(ir_2x)$	

III. Détermination de la constante solaire

Le soleil a une forme sphérique de rayon $R = 7\ 10^8$ m. La terre gravite autour du soleil en restant à une distance moyenne $d = 1.5\ 10^{11}$ m. Au point de vue de l'émission thermique, le soleil se comporte comme un corps noir à la température $T = 6000$ K.

1. Déterminer la valeur de la puissance reçue au niveau de la terre par unité de surface orientée normalement aux rayons du soleil en ignorant l'atmosphère terrestre.

Rappel : $\sigma = \frac{c}{4}\sigma_B = 5.67\quad 10^{-8}\, W.m^{-2}.K^{-4}$ (constante de Stefan)

IV. Distribution canonique

On considère un gaz classique de N molécules diatomiques rigides (on néglige les vibrations) et indiscernables (N>>1), de masse m, sans interaction entre elles, enfermées dans un volume V et en équilibre avec un thermostat à la température T. On néglige le mouvement de vibration des molécules (gelé), et on suppose que les degrés de translation et de rotation peuvent décrits de manière classique. On suppose que les degrés de liberté de rotation sont indépendants de ceux de translation et on rappelle que l'hamiltonien classique de rotation d'une molécule s'écrit :

$$H_{rot}(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi) == \frac{1}{2I}\left[p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right]$$

Où I désigne le moment d'inertie de la molécule, p_θ et p_φ les impulsions généralisées, θ et φ repèrent dans l'espace la direction de l'axe internucléaire de la molécule. L'état rotationnel de la molécule est parfaitement caractérisé à un instant donné par les quatre variables θ, φ, p_θ et p_φ. Soit Z la fonction de partition totale du gaz et z celle d'une molécule.

A. Etude du gaz en l'absence de champ extérieur

1. Exprime Z en fonction de z. Exprimer z en fonction de z_{tr}, relative aux degrés de translation et z_{rot} relative aux degrés de rotation d'une molécule.
2. Calculer z_{tr} en fonction de T, m, h et V.
3. Calculer z_{rot} en fonction de T, h et I.
4. Calculer les énergies moyennes de translation $< \varepsilon_{tr} >$ et de rotation $< \varepsilon_{rot} >$ d'une molécule. Ce résultat était-il prévisible dans le cadre d'une description classique ?
5. En déduire l'énergie moyenne $< U >$ et la capacité thermique à volume constant C_v du gaz.
6. Calculer le paramètre γ du gaz.

B. Etude du gaz en présence d'un champ électrique extérieur

On suppose maintenant que le gaz est plongé dans un champ électrique uniforme et constant $\vec{E} = E_0\,\vec{e}_z$ dirigé suivant Oz. Les molécules possèdent un moment dipolaire électrique permanent $\vec{\mu}$ dirigé suivant l'axe internucléaire ($\vec{\mu}$ fait un angle avec $\vec{E}$). On rappelle que l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle de moment $\vec{\mu}$ dans un champ électrique $\vec{E}$ a pour expression : $U_i(\theta) = -\vec{\mu}\cdot\vec{E} = -\mu E_0 \cos\theta$

On négligera toute interaction entre les moments dipolaires des différentes molécules. La direction d'un dipôle $\vec{\mu}$ est donc repérée, en coordonnées sphériques, par les angles θ et φ, l'axe Oz servant de référence ; le dipôle $\vec{\mu}$ pointe dans l'angle solide élémentaire autour de la direction (θ, φ).

1. Montrer, en présence de $\vec{E}$, que la nouvelle valeur z'_{rot} de la fonction de partition de rotation d'une molécule a pour expression : $z'_{rot} = z_{rot}\, z_E(x)$ avec $z_E(x) = \dfrac{sh\,x}{x}$ où $x = \dfrac{\mu E_0}{k_B T}$.
2. Montrer que la nouvelle valeur de l'énergie moyenne de rotation d'une molécule $< \varepsilon'_{rot} >$ s'écrit : $< \varepsilon'_{rot} > = < \varepsilon_{rot} > + w(x)$. Déterminer $w(x)$. En déduire que l'énergie moyenne du gaz en présence de $\vec{E}$ s'écrit $< U' > = N[\frac{5}{2} k_B T + \mu E_0 (\frac{1}{x} - \coth x)]$
3. Montrer que la nouvelle capacité thermique à volume constant C'_v du gaz est la somme de deux contributions que l'on explicitera.
4. Etudier le comportement de $< U' >$ et C'_v à haute température ($x \ll 1$, $\mu E_0 \ll k_B T$), puis à basse température ($x \gg 1$, $\mu E_0 \gg k_B T$). Commenter physiquement les résultats.

Rappels : $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ $\qquad\qquad$ $\coth(x) - \dfrac{1}{x} \cong \dfrac{x}{3}$ pour $x \ll 1$

Angle solide élémentaire dΩ autour de la direction (θ et φ) : $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$