UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence de Sciences Physiques et Chimiques

THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE- EXAMEN Janvier 2010-

Corrigé

I. Question de cours : Diffusion thermique

la loi de Fourier : $\vec{J}_U(\vec{r},T) = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T$ où λ est la conductivité thermique exprimée en $W.m^{-1}.K^{-1}$; où $\overrightarrow{grad}\, T$ est le gradient de température en $K.m^{-1}$; où $\vec{J}_U$ est le vecteur courant volumique non convectif d'énergie interne à travers une surface S définie par sa normale orientée $\vec{n}$. La dimension de $\vec{J}_U$ est donc des $W.m^{-2}$.

II. Diffusion de neutrons dans un barreau

A. Diffusion sans termes de production $dN = dN^r$

1. $dN = d\iiint_V n_V\, dV = \iint_S \vec{J}_n.(-\vec{n})\, dS\, dt;\ \dfrac{dN}{dt} = \iiint_V \dfrac{\partial n_V}{\partial t} dV = -\iiint_V div(\vec{J}_n)\, dV$

2. $$\frac{\partial n_V}{\partial t} = -div\, \vec{J}_n = -div(-D\frac{\partial n_V}{\partial x}) = D\frac{\partial^2 n_V}{\partial x^2}$$

3. $\dfrac{\partial n_V}{\partial t} = 0$; $\dfrac{\partial^2 n_V}{\partial x^2} = 0$ *et* $n_V = Ax + B$; $n_0 = n_V(x=0) = B$ *et* $A = \dfrac{n_L - n_0}{L}$

$$n_V(x) = \frac{n_L - n_0}{L}x + n_0\ ;\ J_n = -D\frac{n_L - n_0}{L} = cte$$

B. Diffusion avec termes de production $dN = dN^r + \delta N^p - \delta N^a$

1. $dn_V\, Sdx = [\, J_n(x)S - J_n(x+dx)S\,]\, dt + K\dfrac{n_v}{\tau} S\, dx\, dt - \dfrac{n_v}{\tau} S\, dx\, dt$

$$\frac{\partial n_V}{\partial t} = (-\frac{\partial J_n}{\partial x}) + K - 1)\frac{n_v}{\tau} \qquad \frac{dn_V(x,t)}{dt} = \mathrm{D}\frac{\partial^2 n_V(x,t)}{\partial x^2} + \frac{(K-1)}{\tau} n_V(x,t)$$

2. $\delta N^p \langle\ \delta N^a$ (K < 1) et $\dfrac{\partial n_V}{\partial t} = 0$; $\qquad \dfrac{\partial^2 n_V(x)}{\partial x^2} + \dfrac{(K-1)}{D\tau} n_V(x) = 0$

Equation caractéristique: $ar^2+br+c = 0$ *avec* $a=1$, $b=0$ *et* $c = \dfrac{(K-1)}{D\tau}$; $\Delta = -\dfrac{(K-1)}{D\tau} > 0$ (K<1)

$$n_V(x) = A\exp(-\sqrt{\frac{(K-1)}{D\tau}}\, x) + B\exp(+\sqrt{\frac{(K-1)}{D\tau}}\, x)$$

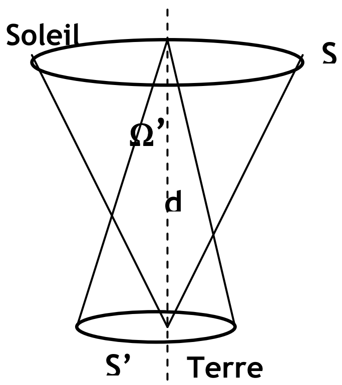
$$n_V(x \to \infty) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad et\ n_V(x \to 0) = n_0 \Rightarrow A = n_0\ ;\ n_V(x) = n_0\exp(-\sqrt{\frac{(K-1)}{D\tau}}\, x)$$

$$L_d \text{ tq } n_V(L_d) = n_0\exp(-\sqrt{\frac{(K-1)}{D\tau}} L_d = \frac{n_0}{e} \Rightarrow \quad L_d = \sqrt{\frac{D\tau}{(K-1)}}$$

3. $\vec{J}_n = n_V < \vec{v_e} > = n_0 \exp(-x/L_d) < \vec{v_e} > = \frac{D}{L_d} n_0 \exp(-x/L_d)$; $< v_e > = \frac{D}{L_d} = \sqrt{\frac{D(K-1)}{\tau}}$

III. Détermination de la constante solaire

La puissance totale P_S émise par la surface du soleil (assimilé à un corps noir) est : $P_S = 4\pi R^2 \sigma T^4$. a puissance P' reçue par une surface S'placée à uns distance d du soleil est : $P' = P_S \frac{\Omega'}{4\pi} = P_S \frac{S'}{4\pi d^2} = \frac{4\pi R^2}{4\pi d^2} S' \sigma T^4$ et $\frac{P'}{S'} = (\frac{R}{d})^2 \sigma T_S^4 = 1540\ W.m^{-2}$



IV. Distribution canonique

A. Etude du gaz en l'absence de champ extérieur

1. $Z = \frac{z^N}{N!}$ et $z = z_{tr}\, z_{rot}$

2. $H_{trans}(p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$

$$z_t = \frac{1}{h^3} \int\int\int\int\int\int \exp(-\frac{\beta p^2}{2m})\, d^3\vec{p}\, d^3\vec{r} = \frac{1}{h^3} \int\iiint dxdydz \iiint dp_x dp_y dp_z \exp(-\frac{\beta(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m}$$

$$z_t = \frac{V}{h^3} [\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \exp(-\frac{\beta p_x^2}{2m})]^3 = \frac{V}{h^3}(2m\pi k_B T)^{3/2}$$

3.

$$z_{rot} = \frac{1}{h^2} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dp_\theta\, dp_\varphi \exp(-\beta E(\theta,\varphi)) = \frac{2\pi}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\varphi \exp(-\frac{\beta p_\varphi^2}{2I \sin^2\theta}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_\theta \exp(-\frac{\beta p_\theta^2}{2I}) \int_0^{\pi} d\theta$$

$$z_{rot} = \frac{2\pi}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\varphi \exp(-a p_\varphi^2) \int_{-\infty}^{\infty} dp_\theta \exp(-b p_\theta^2) \int_0^{\pi} d\theta$$ avec a = $\frac{\beta}{2I \sin^2\theta}$ et b = $\frac{\beta}{2I}$ = a $\sin^2\theta$

$$z_{rot} = \frac{2\pi}{h^2} \int_0^{\pi} d\theta \sqrt{2\pi I \sin^2\theta\, k_B T}\ \sqrt{2\pi I\, k_B T} = \frac{2\pi}{h^2}(2\pi I\, k_B T) \int_0^{\pi} d\theta \sin^2\theta \quad = 8\frac{\pi^2}{h^2}(I\, k_B T)$$

4. $\langle \varepsilon_{tr} \rangle = -\frac{\partial(Ln\, z_{tr})}{\partial\beta} = \frac{\partial(Ln\, \beta^{-\frac{3}{2}})}{\partial\beta} = \frac{3}{2} k_B T$; $\langle \varepsilon_{rot} \rangle = -\frac{\partial(Ln\, z_{rot})}{\partial\beta} = \frac{\partial(Ln\, \beta^{-1})}{\partial\beta} = k_B T$

$$H_{total} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m} \equiv 5\frac{k_B T}{2} \ (\text{équipartition})$$

5. $<U>=N[\langle\varepsilon_{tr}\rangle+\langle\varepsilon_{rot}\rangle]=\frac{5}{2}Nk_BT$; $C_v=\frac{5}{2}Nk_B$ 6. $C_p=\frac{5}{2}Nk_B+k_B=\frac{7}{2}Nk_B$; $\gamma=\frac{7}{5}$

B. Etude du gaz en présence d'un champ électrique extérieur

1. $$H'_{rot}(\theta,\varphi,p_\theta,p_\varphi)==\frac{1}{2I}[p_\theta^2+\frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}-\mu E_0\cos\theta]$$

$$z'_{rot}=\frac{1}{h^2}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\infty}^{\infty}dp_\theta\, dp_\varphi\exp(-\beta H')=\frac{2\pi}{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}dp_\varphi\exp(-\frac{\beta p_\varphi^2}{2I\sin^2\theta})\int_{-\infty}^{\infty}dp_\theta\exp(-\frac{\beta p_\theta^2}{2I})\int_0^\pi\exp(\mu E_0\cos\theta)d\theta$$

$$z'_{rot}=\frac{2\pi}{h^2}(2\pi I k_BT)\int_0^\pi\exp(\mu E_0\cos\theta)\sin\theta\, d\theta=\frac{z_{rot}}{2}(\frac{k_BT}{\mu E_0})\int_{-\beta\mu E_0}^{\beta\mu E_0}\exp(x)dx=z_{rot}\frac{sh(x)}{x}$$

2.

$$\langle\varepsilon'_{rot}\rangle=-\frac{\partial(Ln\, z'_{rot})}{\partial\beta}=-\frac{\partial(Ln\, z_{rot})}{\partial\beta}-\frac{\partial}{\partial\beta}Ln(\frac{shx}{x})=\langle\varepsilon_{rot}\rangle+[-\frac{\partial}{\partial x}Ln(shx)+\frac{\partial}{\partial x}Ln(x)]\frac{\partial x}{\partial\beta}$$

$\langle\varepsilon'_{rot}\rangle=\langle\varepsilon_{rot}\rangle+[-\coth x+\frac{1}{x}]\mu E_0=\langle\varepsilon_{rot}\rangle+w(x)$ avec $w(x)=(+\frac{1}{x}-\coth x)\mu E_0$

$$<U'>=N[\langle\varepsilon_{tr}\rangle+k_BT-\mu E_0\coth x)]=N[\frac{7}{2}k_BT-\mu E_0\coth x)]=N[\frac{5}{2}k_BT+\mu E_0(\frac{1}{x}-\coth x)]$$

3.

$$C'_V=(\frac{\partial<U'>}{\partial T})_V=<U'>=N[\frac{7}{2}k_B-\mu E_0\frac{\partial}{\partial T}(cothx)]=\frac{7}{2}Nk_B-N\mu E_0[\frac{\partial}{\partial x}(cothx)(-\frac{\mu E_0}{k_BT^2})]$$

$$C'_V=Nk_B[\frac{7}{2}-(\frac{\mu E_0}{k_BT})^2(\frac{1}{sh^2x})]=Nk_B[\frac{7}{2}-(\frac{x}{sh\ x})^2]$$

ou $C'_V=Nk_B[\frac{5}{2}+(1-\frac{x^2}{sh^2x})]=N\frac{k_B}{2}[5+2(1-(\frac{x}{shx})^2)]$ *avec* 5 degrés de liberté (tabslation +rotation) et 2 orientations possibles de μ avec E_0.

4. ($x<<1,\ \mu E_0<<k_BT$), à haute température $<U'>\cong N\frac{5}{2}k_BT-N\frac{(\mu E_0)^2}{3k_BT}\cong\frac{5}{2}Nk_BT$

Du fait de l'agitation thermique, les dipôles sont orientés au hasard ; on retrouve le même résultat qu'en l'absence de champ et $C'_V\cong Nk_B[\frac{5}{2}+(1-\frac{x^2}{x^2})]\cong\frac{5}{2}Nk_B$

($x>>1,\ \mu E_0>>k_BT$), à basse température $<U'>\cong\frac{7}{2}Nk_BT-N\mu E_0\cong-N\mu E_0$

$\coth x-\frac{1}{x}$ et $1-\frac{x^2}{sh^2x}\rightarrow 1$ quand $x\rightarrow\infty$; Tous les dipôles s'alignent dans la direction du champ électrique et $C'_V=Nk_B[\frac{5}{2}+(1-\frac{x^2}{sh^2x})]\cong\frac{7}{2}Nk_B$