UNIVERSITE PAUL SABATIER
Licence de Sciences Physiques et Chimiques

Année Universitaire 2008 – 2009

Thermodynamique Statistique

Examen Décembre 2008

(Durée 2 heures)

I. Rendement d'une lampe à filament de Tungstène

Le filament de tungstène d'une lampe est porté à une température T = 2 500 K. Le filament sera considéré comme un corps noir.

1. Rappeler la définition d'un corps noir.

2. Evaluer le rendement r du filament de tungstène, c'est à dire la fraction de l'énergie électromagnétique rayonnée dans le visible à la température T. On donne les longueurs d'onde extrêmes du visible : λ_1 = 0.8µm (à la limite de l'infrarouge) et λ_2 = 0.4µm (à la limite de l'ultra-violet).

3. Quel est l'intérêt d'augmenter la température du filament ?

Rappels : La densité spectrale d'énergie électromagnétique par unité de volume $u(\lambda,T)$ dans le corps noir est donnée par la loi du rayonnement de Planck :

$$u(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T})-1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^4}{15} \qquad \int x^3\, e^{-x}\, dx = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)$$

II. Vibration et équation d'état d'un solide - Modèle d'Einstein

Un solide est constitué de N atomes discernables situés aux nœuds d'un réseau cristallin qui peuvent vibrer autour de leur position d'équilibre. En première approximation, on peut représenter le solide comme 3N oscillateurs harmoniques **discernables**, identiques et indépendants à 3 dimensions. Ces oscillateurs sont en équilibre thermique avec un thermostat à la température T. Dans le modèle d'Einstein, tous ces oscillateurs ont la même pulsation ω indépendante de la température T. Leurs états sont caractérisés par 3 nombres entiers positifs ou nuls n_x, n_y et n_z. L'˝energie de l'état (n_x, n_y, n_z) a pour expression: $\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \{ (n_x + 1/2) +(n_y + 1/2) +(n_z + 1/2)\} \hbar\omega$. (On notera $\varepsilon_{n_x,} = (n_x + 1/2)\hbar\omega$; $\varepsilon_{n_y,} = (n_y + 1/2)\hbar\omega$; $\varepsilon_{n_z} = (n_z + 1/2)\hbar\omega$)

1. Calculer la fonction de partition z d'un oscillateur harmonique. En déduire l'énergie moyenne <ε> d'un oscillateur.

2. Déterminer la fonction de partition Z du solide.

3. Montrer que l'énergie moyenne <E> se déduit de <ε> par la relation<E>=N<ε>.

4. Montrer que l'énergie libre F du solide d'Einstein s'écrit :

$$F = \frac{3}{2}N\hbar\omega + 3Nk_BT\,\ln[1-\exp(-\beta\hbar\omega)] \text{ avec } \beta = \frac{1}{k_BT}$$

5. Montrer que la capacité thermique à volume constant C_v. s'écrit :

$$C_v = 3Nk_B \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{[\exp(\frac{\theta_E}{T})]}{[\exp(\frac{\theta_E}{T})-1]^2}$$

où θ_E est la température d'Einstein ($\theta_E = \frac{\hbar\omega}{k_B}$)

6. Etablir les valeurs limites de C_v quand $T \ll \theta_E$ (basses températures) et $T \gg \theta_E$ (hautes températures). A haute température, le résultat obtenu est-il une conséquence directe du théorème d'équipartition de l'énergie ? Justifier votre réponse. Représenter l'allure de la variation de ($C_v/3Nk_B$) en fonction de T.

Rappels : Soit S la somme d'une série géométrique de raison, alors $S = \frac{1}{1-a}$

III. Diffusion axiale de molécules

On considère un tube cylindrique horizontal, de longueur L, de section S, dans lequel s'effectue la diffusion de molécules. La densité particulaire en régime stationnaire, $n_V(x)$ ne dépend que l'abscisse x le long de l'axe du cylindre. Les densités particulaires aux extrémités du tube sont imposées : $n_V(x=0)=n_1$ et $n_V(x=L)=n_2$.

1. Rappeler la loi de Fick dans le cas d'une diffusion axiale (à une dimension x) en précisant les différentes grandeurs introduites et leurs unités SI.

2. Effectuer un bilan du nombre de molécules sur un élément de volume cylindrique dV= S dx, de section S, entre les abscisses x et x+dx pendant la durée élémentaire dt. On rappelle que le vecteur -**n** représente la normale entrante à la surface de ce volume élémentaire dV. Etablir l'équation locale de diffusion des molécules dans le tube.

3. Etablir l'équation différentielle de la diffusion en régime stationnaire dans le tube.

4. En déduire les expressions de $n_V(x)$ et du flux de molécules par unité de surface.