UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence STS, Mention Physique

Parcours Sciences Physiques et Chimiques- L3

Année Universitaire 2007 – 2008

UE1 – Thermodynamique Statistique

Examen Janvier 2008 (durée 2 h)

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié ultérieurement

I. Gaz parfait dans un champ de pesanteur

On considère un gaz parfait¸ en contact avec un thermostat à la température T, contenant N molécules indépendantes de masse m dans une enceinte de volume V. On considère les particules comme étant indiscernables.

1) (1pt) Calculer la fonction de partition z_0 d'une molécule. En déduire la fonction de partition Z_0 des N molécules indiscernables.

2) (2pts) En déduire l'énergie moyenne $< E_0 >$, l'énergie libre F_0 et l'entropie canonique S_0 du gaz parfait.

3) (1pt) Calculer les capacités calorifiques à volume et pression constants (C_{v0} et C_{p0})

Le gaz parfait est soumis à un champ de gravitation. On considère une colonne d'air considéré comme un gaz parfait, est contenue dans un cylindre de section A et de hauteur L fixées. Cette colonne est soumise à un champ de gravitation $\overrightarrow{g_0}$ et la température T de l'atmosphère, prise dans son ensemble, est supposée uniforme. On prendra comme origine de l'énergie potentielle et de l'altitude la surface du sol sur laquelle est posé le cylindre. On désignera par Oz la verticale ascendante.

4) (1pt) Donner l'expression de l'énergie totale ε (m, p_x, p_y, p_z, g_0, z) d'une particule de masse m se trouvant à l'altitude z. Montrer que cette énergie est la somme de deux termes dont on précisera l'origine physique.

5) (2pts) Montrer que la fonction de partition Z_p du gaz parfait 'soumis au champ de pesanteur se met sous la forme : $Z_p = Z_o . Z_{int}$ où $Z_{int} = [1 - \exp(-x)]^N] x^{-N}$ avec $x = (\frac{mg_o L}{k_B T})$

6) (2pts) Montrer que l'énergie moyenne$< E >$ se met sous la forme :

$$< E > = < E_0 > + Nmg_0 L \ [\frac{1}{x} - \frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-x)}]$$

Donner les valeurs limites de $< E >$ pour $x << 1$ et $x >> 1$. Montrer que dans le cas où $x << 1$, la valeur limite de $< E >$ était prévisible. Dans le cas $x \neq 0$, quelle remarque peut-on faire en ce qui concerne la validité du théorème d'équipartition de l'énergie en physique statistique classique ? Que peut-on dire de la limite x >>1 du point de vue de la validité du modèle développé dans ce problème ?

7) (1pt) En déduire la capacité calorifique à volume constant Cv quand x << 1 et x >> 1.

8) (1,5pt) On considère maintenant la hauteur de la colonne de gaz comme **infinie**. On rappelle que la probabilité $dP(\vec{r}, \vec{p})$, qu'une molécule de gaz parfait ait sa position et son impulsion connues respectivement à $d^3\vec{r}$ et $d^3\vec{p}$ près, est $dP(\vec{r}, \vec{p}) = f(\vec{r}, \vec{p})\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{p}$. Etablir la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{p})$ d'une molécule de gaz de parfait. On appellera C la constante de normalisation.

9) (1,5pt) Montrer que le nombre de molécules dN_z situées dans l'élément de volume dV=A dz à l'altitude z. a pour expression $dN_z = N \frac{mg_0}{k_B T} \exp(-\frac{mg_o z}{k_B T})$ Déterminer la densité particulaire n(z) du gaz parfait en fonction de l'altitude (nivellement barométrique).

10) (2pts) On suppose que l'on peut utiliser localement l'équation des gaz parfaits. Comment la pression p(z) varie –t- elle avec l'altitude ?

On considère des molécules d'azote (N_2) que l'on peut assimiler à un gaz parfait. Les températures caractéristiques de rotation T_r et de vibration T_v de la molécule diatomique N_2 sont respectivement 2.9 et 3374 K. On rappelle que l'énergie cinétique de rotation d'une molécule diatomique s'écrit : $\varepsilon_r = \frac{1}{2I}[\, p_\theta^{\,2} + \frac{p_\phi^{\,2}}{2I \sin^2\theta}]$ où les θ et ϕ sont les variables angulaires permettant de décrire la rotation de la molécule diatomique autour des deux axes de rotation, I le moment d'inertie de la molécule diatomique et p_θ, p_φ les impulsions de la molécule en coordonnées sphériques. Utiliser en le justifiant le théorème d'équipartition de l'énergie pour les mouvements de rotation et déterminer alors l'énergie moyenne < E > et la capacité calorifique Cv à volume constant des molécules de N_2 soumises au champ de pesanteur tel que x >> 1. Quelle est la contribution des mouvements de vibration des molécules d'azote à Cv ?

Rappel : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

II. Stabilité d'un réacteur nucléaire

Dans un réacteur nucléaire les neutrons se déplacent dans un milieu homogène formé d'atomes de plutonium. On note $n(\vec{r}, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume

1) (1pt) Enoncer la loi de Fick en précisant les grandeurs physiques introduites et leurs unités.
2) (2pts) Etablir entre les instants t et t+dt, le bilan du nombre de neutrons dN localisés à l'intérieur d'un volume V fixé délimitée par une surface fermée S. On notera σ le nombre de neutrons produits algébriquement par unité de volume et de temps.

3) (1pt) En déduire le bilan local et établir l'équation de diffusion satisfaite par $n(\vec{r},t)$.

4) (1pt) On se propose d'expliciter le terme de production σ. Lors d'un choc avec un atome de plutonium un neutron est soit diffusé, soit absorbé. Soit v le module de la vitesse moyenne des neutrons supposé constant et L la distance parcourue par un neutron jusqu'à son absorption. On pose $\tau = \frac{L}{v}$, montrer que le nombre de neutrons absorbés par unité de volume et de temps est $\frac{n}{\tau}$.

5) (1pt) Lors de son absorption le neutron provoque la fusion du noyau de plutonium qui conduit à l'émission de K neutrons. En déduire le nombre de neutrons produits par unité de volume et de temps. En déduire σ et expliciter l'équation de diffusion obtenue au 3).

6) (1pt) On considère pour simplifier que la diffusion des neutrons est unidimensionnelle (par exemple x), limitée par deux plans d'abscisse x = - a/2 et a/2 sur lesquels la densité de neutrons est nulle. On recherche les conditions nécessaires pour que le réacteur atteigne un régime permanent <u>stable</u>. Expliciter dans ce cas l'équation de diffusion satisfaite par n. On posera $\omega^2 = \frac{K \pm 1}{D\tau}$.

7) (1pt) Donner la forme de n en fonction des valeurs de K et montrer que n(x = ± a/2) = 0 conduit à une première condition K > 1.

8) (1pt) La géométrie du réacteur implique que n(x) = n(-x) ∀x .En déduire la forme de n(x).

9) (1pt) Déduire alors des conditions aux limites une relation simple entre K,τ, D et a où D est le coefficient de diffusion.

Rappels : équation différentielle (E) : ay '' + b.y ' + c.y = 0

Equation caractéristique (EC) associée : $ar^2 + b.r + c = 0$

Si (EC) admet deux solutions réelles r_1 et r_2, alors la solution générale de (E) est

$y(x) = A \exp(r_1 x) + B.\exp(r_2 x)$ où A et B constantes réelles quelconques.

Si (EC) admet deux solutions complexes conjuguées α + i. β et α - i. β (avec α et β réels), alors la solution générale de (E) est $y(x) = \exp(\alpha x).[A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x)]$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.