UNIVERSITE TOULOUSE III
Licence Mention Physique Parcours Sciences Physiques et Chimiques

1er semestre 2011-2012

Thermodynamique Statistique

TD1 : Lois des probabilités et distributions statistiques

Rappels

1 - Probabilités relatives à une variable discrète. Définition :

i) d'un événement statistique e, d'une variable aléatoire discrète x

ii) de la probabilité P(e) d'un événement e

2 - Probabilités relatives à une variable continue. Densité de probabilité ou fonction de distribution $\rho(x)$. Définitions.

3 - Lois de composition des probabilités

i) Règle d'addition des probabilités pour des événements aléatoires qui s'excluent mutuellement. Normalisation à l'unité

ii) Règle de multiplication des probabilités pour des événements aléatoires statistiquement indépendants.

4 - Valeurs moyennes. Définitions

i) Valeur moyenne < x > d'une v.a, d'une fonction de cette variable.

ii) Variance $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ et écart quadratique moyen $\sigma_x = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$ d'une v.a, d'une fonction de cette variable.

iii) valeur moyenne de la somme de deux fonctions d'une même v.a.

iiii) valeur moyenne du produit de deux v.a statistiquement indépendantes.

I. Lancement d'un dé.

1. Calculer la valeur moyenne, la variance et l'écart quadratique moyen pour la v.a associée à un simple lancement d'un dé.

II. Distribution gaussienne

C'est une distribution continue dont la densité de probabilité s'écrit:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}]$$

1. Vérifier la condition de normalisation. Calculer la valeur moyenne < x > et l'écart quadratique moyen σ_x.
2. Donner l'allure de la densité de probabilité $\rho(x)$, faire apparaître < x > et σ_x sur le graphe.

III. Distribution des modules des vitesses des atomes d'un gaz parfait en équilibre à la température T.

En thermodynamique statistique, on montre que la probabilité pour qu'un atome de masse m d'un gaz parfait en équilibre à la température T ait le module de la vitesse compris entre v et v + dv s'écrit :

$dP(v) = \rho(v)\,dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{m v^2}{2 k_B T}\right) dv$ où $\rho(v)$ est la densité de probabilité (ou fonction de distribution)

1. Vérifier que $\rho(v)$ est bien une densité de probabilité

2. Peut-on considérer cette distribution comme une distribution gaussienne ?

3. Calculer, en fonction de T, la vitesse moyenne < v >, la vitesse quadratique $v_q = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

Si l'on s'intéresse maintenant à la distribution statistique d'une composante de la vitesse, par exemple v_x, la densité de probabilité est alors de la forme : $\rho(v_x) = A \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2 k_B T}\right)$. Déterminer A pour que $\rho(v_x)$ soit normée à l'unité.

4. Montrer que cette distribution statistique est une distribution gaussienne entrée en zéro dont on déterminera sa moyenne et son écart quadratique moyen en fonction de T.

5. A partir de l'expression de la fonction de distribution d'une composante de la vitesse $\rho(v_x)$ écrire l'expression de la fonction de distribution $\rho(\vec{v})d\vec{v}$ du vecteur vitesse $\vec{v}$ en faisant l'hypothèse que les vitesses v_x, v_y et v_z sont des variables indépendantes.

Travail Personnel : Distribution binomiale

Soit (+) un événement et (-) son contraire, et P_+ et P_- les probabilités correspondantes.

1. Montrer que la probabilité $P(N,n)$ (où 0 ≤ n ≤ N) pour que, au cours de N expériences (ou une expérience dans laquelle intervient N fois la même grandeur), l'événement (+) choisi se réalise n fois est: $P(N,n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} P_+^n\, P_-^{N-n}$.

2. Montrer que la valeur moyenne $\langle n \rangle = N P_+$ et l'écart quadratique moyen $\sigma = \sqrt{N P_+ P_-}$. On pourra calculer à cet effet $\frac{\partial}{\partial P_+} P(N,n)$ et $\left(P_+ \frac{\partial}{\partial P_+} P(N,n)\right)^2$ en supposant que P_+ et P_- sont des variables indépendantes.

Formule du binôme : $((p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} p^n q^{N-n}$