UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

07/09/2005

Licence de Sciences Physiques et Chimiques
L3

Epreuve d'électromagnétisme

Durée 2h - Tous documents interdits

I. Polarisabilité électronique de l'atome d'hydrogène :

L'atome d'hydrogène peut être considéré comme un noyau de charge +e au centre d'une sphère uniformément chargée de rayon a = 0.053 nm et de charge –e.

1. Sous l'action d'un champ électrique **E**, on considère que le nuage électronique est déplacé rigidement d'une distance d par rapport au noyau.
   a) Calculer, à partir du théorème de Gauss le champ électrique $\mathbf{E_e}$ créé par le nuage électronique au point où se trouve le noyau.
   b) Montrer que l'électron est élastiquement lié au noyau et exprimer la constante de rappel k. Déduire la fréquence propre ω_0 du mouvement libre.
   c) Exprimer le déplacement d à l'équilibre. En déduire la polarisabilité électronique de l'atome d'hydrogène en fonction de son rayon.
2. On envisage une vapeur atomique d'hydrogène de concentration n soumise à un champ électrique **E**.
   a) Exprimer la constante k en fonction de la polarisation P et du champ E.
   b) Exprimer la permittivité sous la forme $\varepsilon = 1 + (\omega_p^2 / \omega_0^2)$

II. Supraconductivité : Effet Meissner

Pour certains conducteurs, on observe la disparition de toute résistivité mesurable au dessous d'une certaine température critique T_C (4,15 K pour le mercure, premier cas rencontré en 1911). Pendant longtemps, l'intérêt de tels matériaux, dits « supraconducteurs » a été limité par les très basses valeurs des températures critiques, nécessitant –concrètement- l'emploi d'hélium liquide.

L'intérêt du sujet a été relancé par l'obtention (il y a une vingtaine d'années) de matériaux supraconducteurs « haute température » dont les températures critiques, supérieures à 100 K, peuvent être réalisées dans de l'azote liquide, beaucoup moins onéreux.

On se propose ici de montrer qu'un supraconducteur n'est pas seulement un conducteur de conductivité infinie (conducteur parfait), mais est en fait caractérisé principalement par ses propriétés magnétiques (effet Meissner, 1933).

On admet que dans un supraconducteur, le potentiel vecteur **A** est proportionnel à la densité de courant (équation de London) ce qui se traduit par :

$$\mathbf{B} = -1/\Lambda\ \mathbf{rot\ J}$$

où Λ est une constante positive.

1. Ecrire les équations de Maxwell en régime statique.
2. (a) Montrer qu'en régime statique, le champ magnétique **B** dans un supraconducteur vérifie une équation du type $\Delta\mathbf{B} - \mathbf{B}/\lambda^2 = \mathbf{0}$ où λ est une constante positive. Préciser la dimension de λ et exprimer cette constante en fonction de Λ et μ_0.

   On rappelle l'expression d'analyse vectorielle : $\mathbf{rot\ rot\ V} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{V} - \Delta\mathbf{V}$

(b) Montrer qu'une solution du type $B_i = B_{i0} \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right)$ (où i = (x, y, z) et B_{i0} sont des constantes) convient pour représenter les composantes cartésiennes du champ magnétique **B** à l'intérieur du supraconducteur.

3. Dans un modèle simplifié, le supraconducteur est modélisé par le demi-espace z > 0. A l'extérieur du supraconducteur et au contact immédiat de celui-ci ($z \to 0_-$), règne un champ magnétique extérieur que l'on représente a priori sous la forme :

$$\mathbf{B}_{\mathbf{ext}} = B_0\mathbf{u}_\mathbf{x} + \beta\mathbf{u}_\mathbf{z}$$

où B_0 et β sont des constantes.

(a) Exprimer la continuité du champ en z = 0 et en déduire les composantes du champ magnétique **B** à l'intérieur du supraconducteur en fonction de B_0, β, λ et z.

(b) En utilisant des équations de Maxwell relatives au champ magnétique, montrer que le champ magnétique intérieur **B** est nécessairement tangent au supraconducteur. Que devient le champ extérieur $\mathbf{B}_{\mathbf{ext}}$?

(c) On dit couramment que « l'effet Meissner consiste en l'expulsion du champ magnétique du volume du supraconducteur », ou encore que « le champ magnétique est nul à l'intérieur d'un supraconducteur ». Par ailleurs, les valeurs de Λ conduisent à λ = 50 nm. Commenter cette formulation ainsi que cet ordre de grandeur.

4. (a) Exprimer **j** dans le supraconducteur précédent en fonction de B_0, λ, μ_0 et z.

(b) Calculer $\mathbf{I} = \int_0^\infty \mathbf{J}(z)dz$. Quelle est, à votre avis, la signification physique de cette quantité **I** ?

5. De façon un peu plus réaliste, on considère maintenant une plaquette de supraconducteur définie par -a < z < a, avec pour conditions aux limites :

$$\mathbf{B}(-a) = \mathbf{B}(a) = B_0\mathbf{u}_\mathbf{x} = \mathbf{B}_{\mathbf{ext}}$$

On peut montrer (on ne cherchera pas à le faire ici) que le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur a, compte tenu de la symétrie du problème, pour solution :

$$B_x = K ch\left(\frac{z}{\lambda}\right)$$

avec K une constante et ch (x) la fonction hyperbolique $ch(x) = \frac{\exp(x) + exp(-x)}{2}$.

(a) Exprimer la continuité du champ en z = ± a et en déduire le champ magnétique **B** à l'intérieur du supraconducteur en fonction de B_0, a, λ et z.

(b) Tracer B(z) / B(a) en fonction de z / a en posant a / λ = 10. En déduire que, la plaquette ayant une largeur très supérieure à λ, on retrouve le modèle de la question précédente comme une limite dans les régions z = -a + ε et z = a - ε, avec $0 < \varepsilon << \lambda << a$.