Licence de Sciences Physiques et Chimiques
L3

Examen d'électromagnétisme

Session de Septembre
Durée : 2h - Tous documents interdits

Exercice 1 : *Théorème d'Ampère*

Soit un cylindre d'axe *z'z*, de rayon *a*, de longueur infinie, sur lequel est enroulé un fil très fin, isolé, et parcouru par un courant d'intensité *I*. Les spires du bobinage sont jointives, à raison de *n* spires par mètre.
On réalise ainsi un solénoïde à l'intérieur duquel on place un cylindre creux coaxial de rayons *a* et *b* ($a > b$), constitué par une matière homogène isotrope, de perméabilité absolue μ. Le reste de l'espace ($r > a$ et $r < b$) est occupé par le vide de perméabilité μ_0.

1. Après avoir rappelé le théorème d'Ampère pour un milieu matériel, calculer les vecteurs excitation magnétique ***H*** et champ magnétique ***B*** en *tout point de l'espace*.
2. Déterminer les densités de courant macroscopiques équivalentes à la matière aimantée μ (en volume et en surface en distinguant les surfaces de rayons $r = a$ et $r = b$).

Exercice 2 : *Propagation dans un milieu d'atomes de Thomson*
Les questions sont relativement indépendantes et certains résultats donnés

Nous considèrerons un milieu isotrope constitué d'un ensemble d'oscillateurs chargés identiques, de charge *q*, de masse *m*, de pulsation ω_0, et répartis uniformément selon une densité volumique *N*. Une onde plane, de pulsation ω et de vecteur d'onde ***k***, se propage dans le milieu telle que $\mathbf{E} = \mathbf{E_0} \exp i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)$, avec ***E*** le champ macroscopique moyen.

1. Pour un oscillateur donné et en présence du champ ***E***, écrire l'équation différentielle qui régit le déplacement $\rho = \rho_0 \exp i\,(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)$ par rapport à la position d'équilibre de l'oscillateur (on négligera la force de pesanteur). Dans ce cadre, on négligera le champ électrique dipolaire induit sur cet oscillateur par les autres oscillateurs proches voisins.
Après avoir supposé le milieu *LHI* et avoir exprimé le vecteur polarisation volumique ***P*** en fonction du déplacement, calculer la susceptibilité χ du milieu ainsi que son indice de réfraction *n*. On rappelle que ce dernier est donné par $n^2 = \varepsilon_r$.
2. Nous reprenons le calcul précédent en tenant compte de la présence des proches voisins et en remplaçant le champ macroscopique ***E*** par un champ local de Lorentz $\boldsymbol{E_l}$ tel que $\mathbf{E_l} = \mathbf{E}+\mathbf{P}/3\varepsilon_0$. La permittivité du vide est ε_0. Montrer que le résultat obtenu ce ramène à celui obtenu précédemment à condition de modifier la pulsation d'oscillation ω_0^2 par une valeur Ω_0^2 que l'on précisera.
3. On part de l'équation de conservation $\nabla.\mathbf{S} + dW/dt = 0$, avec $\mathbf{S} = \mathbf{E}\wedge\mathbf{H}$ le vecteur de Poynting, ***H*** le vecteur excitation magnétique et *W* la densité d'énergie.
Rappeler les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère en l'absence de courants.
En supposant le milieu amagnétique, montrer que la variation temporelle de la densité d'énergie peut s'écrire $\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{2}\left[\varepsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t}+\mu_0\frac{\partial H^2}{\partial t}\right]+\vec{E}.\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, avec μ_0 la perméabilité du vide.

Le dernier terme correspond à l'énergie mécanique des oscillateurs $\frac{\partial W_m}{\partial t}$ et le premier à la densité d'énergie du champ électromagnétique On utilisera l'élément d'analyse vectorielle $\nabla.(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \mathbf{b}.(\nabla\wedge\mathbf{a})-\mathbf{a}.(\nabla\wedge\mathbf{b})$.

4. Montrer que la variation temporelle de la densité d'énergie mécanique s'écrit :

$$\frac{\partial W_m}{\partial t}=\frac{1}{2}Nm\left[\frac{\partial}{\partial t}\vec{\rho}^{\bullet 2}+\Omega_0^2\frac{\partial}{\partial t}\vec{\rho}^{2}\right]$$

5. Après avoir établi que le vecteur de Poynting dans le milieu d'indice *n* peut se mettre sous la forme $\vec{S} = \frac{n}{\mu_0 c}\vec{E}^2\vec{u}$, avec ***u*** le vecteur unitaire pointant dans la direction de propagation de l'onde plane, en déduire la valeur moyenne de $<S>$ en fonction des mêmes paramètres.

Questions hors barème :

6. On peut montrer, *mais ce n'est pas demandé ici*, que la valeur moyenne de la densité d'énergie mécanique vaut $\left\langle W_m\right\rangle=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[n^2-1+\omega\frac{d(n^2-1)}{d\omega}\right]\left\langle\vec{E}^2\right\rangle$.

   Calculer, en revanche, celle du champ électromagnétique $\left\langle W_e\right\rangle$ en fonction des mêmes paramètres.

7. Montrer enfin que la valeur moyenne de la densité d'énergie est $\left\langle W\right\rangle=n\varepsilon_0\frac{d(n\omega)}{d\omega}\left\langle\vec{E}^2\right\rangle$. Calculer le rapport $<S>/<W>$ et interpréter.

Exercice 3 : *Susceptibilité diamagnétique d'une vapeur de xénon***:**

Un champ magnétique $\mathbf{B}$ dirigé selon le vecteur $\mathbf{k}$ de l'axe Oz est appliqué à une vapeur de xénon. Lors de l'application du champ, le nuage électronique des atomes de charge $-Ze$ est mis en rotation autour de Oz dans le sens direct avec la fréquence de Larmor $\omega_L = eB/m$. Dans cette expression, m désigne la masse d'un électron. Afin de calculer de façon approchée le moment magnétique induit dans l'atome, on l'assimile à un disque plat de rayon a portant une charge uniforme $-Ze$ en rotation à la vitesse ω_L autour de Oz.

1.Exprimer la charge dQ et le courant dI porté par une couronne du disque défini par la région comprise entre les cercles de rayons respectifs r et r+dr. Indiquer le sens du courant sur un schéma.

2.Déduire le moment magnétique $\mathbf{dm}$ de la couronne. Précisez sa direction.

3. Exprimer le moment magnétique $\mathbf{m}$ de l'atome et l'aimantation $\mathbf{M}$ d'une vapeur en concentration n. Déduire une expression approchée de la susceptibilité χ de la vapeur.