L3 : Partiel EM du 24/04/2005.

I question de cours

1] Milieu uniformément polarisé → distribution surfacique

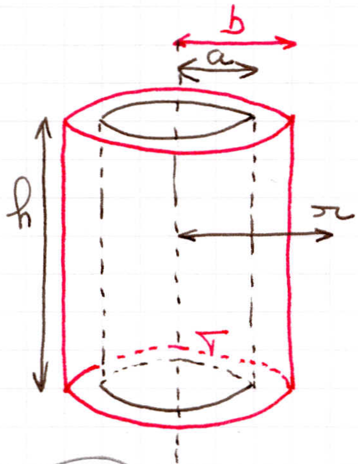
$\sigma_{in} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ex}$

(2)

Cylindre polarisé uniformément le long de son axe ⇒ distribution surfacique de charges sur 2 disques

(2) 2) Différents mécanismes de polarisation | Electronique
d'Orientation
Ionique

II Cylindre conducteur dans une gaine diélectrique



1) Théorème de Gauss dans un milieu matériel

(2)

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{ex}$ ← contribution ext

ou $\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q_{ex}$ charge extérieure au matériau et intérieure à la surface fermée

2) $\vec{D}$ à sym radiale $\vec{D} = D(r)\,\vec{e}_r$

(2)

$$\begin{cases} r<a & D\,2\pi r h = 0 \Rightarrow \vec{D}(r<a) = \vec{0} \\ a<r<b & D\,2\pi r \cancel{h} = \sigma\, \cancel{2\pi} a \cancel{h} \Rightarrow \vec{D}(a<r<b) = \dfrac{\sigma a}{r}\vec{e}_r \\ r>b & \Rightarrow \vec{D}(r>b) = \dfrac{\sigma a}{r}\vec{e}_r \end{cases}$$

3) Gaine $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ $a<r<b$ } $\vec{E}$ et $\vec{P}$.
ε_0 $r>b$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$; $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$\vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{D}$

- $r<a$ $\vec{E}(r<a) = \vec{0}$; $\vec{P} = \vec{0}$
- $a<r<b$ $\vec{E} = \dfrac{\sigma a}{\varepsilon r}\vec{e}_r$; $\vec{P} = -\left(\dfrac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)\dfrac{\sigma a}{r}\vec{e}_r$
- $r>b$ $\vec{E} = \dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$; $\vec{P} = \vec{0}$

$\dfrac{\chi}{1+\chi}$

$\varepsilon_r = 1+\chi$

(1) (1)

4) $\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z} \Rightarrow$ Potentiel

$E_r = -\frac{dV}{dr}$.

2

- $r < a$ $\quad V(r) = cste$ $\quad V(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{b}\right)$
- $a < r < b$: $V(r) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon}\ln r + cste' \Rightarrow V(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{r}\right) + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{b}\right)$
- $r > b$ $\quad V(r) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln r + cste'' \Rightarrow V(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}(\ln r_0 - \ln r)$

cdt limite $\quad -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln r_0 + cste'' = 0$

$$cste'' = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln r_0$$

en $r = b$ $\quad -\frac{\sigma a}{\varepsilon}\ln b + cste' = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln r_0 - \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln b$.

$$cste' = \sigma a \ln b\left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln r_0$$

$$cste' = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)\ln b + \ln r_0\right]$$

5) Capacité du cylindre conducteur $\quad Q = CU$

$U = V_a - V_b$

$= \frac{\sigma a}{\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \cancel{\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{b}\right)} - \cancel{\frac{\sigma a}{\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{b}\right)} - \cancel{\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{b}\right)}$

$U = \frac{\sigma a}{\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{Q}{C} = \frac{\sigma 2\pi a h}{C}$

$$\Rightarrow \frac{C}{h} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

2

Dans un grand nombre de corps, la réaction du milieu à un champ électrique appliqué est caractérisée macroscopiquement par une relation linéaire entre $\vec{P}$ et $\vec{E}$ selon :

2

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \longrightarrow \vec{E} = \vec{E_a} + E_{m,in}$$

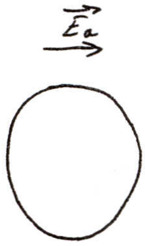
χ_e : susceptibilité diélectrique (sans dimension)

ε_0 : permittivité du vide

$E_{m,in}$: champ produit par le matériau polarisé

Quand la linéarité respectée $\left\{ \forall E, \forall \text{ pt du matériau}, \forall \text{ direction} \right\} \Rightarrow$ milieu LHI

Sphère dans un champ appliqué uniforme



$$\vec{E_a} = E_a \vec{e_3}$$

$\vec{rot}\, \vec{E}_{int} = \vec{0}$ (stationnaire)

$\operatorname{div} \vec{D}_{int} = 0$ (pas de charges extérieures)

En outre $\vec{D}_{int} = \varepsilon_0 \vec{E}_{int} + \vec{P}_{int} = \varepsilon_0 (1+\chi_e) \vec{E}_{int} = \varepsilon \vec{E}_{int}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_0 (1+\chi_e)$

$\vec{D}_{ext} = \varepsilon_0 \vec{E}_{ext}$ avec $\vec{E}_{ext} = \vec{E_a}$, champ appliqué, à grande distance

Pb $\rightarrow$ polarisation volumique $\vec{P}$ de la sphère

$\vec{E} = \vec{E_a} + \vec{E_m} \rightarrow$ champ électrique créé par la sphère polarisée

résultats de cours : $\begin{cases} \vec{E}_{m,int} = -\dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} & \text{pour } r < R \\[2mm] \vec{E}_{m,ext} = \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0} \left[\dfrac{3(\vec{P}\cdot\vec{e_r})\vec{e_r} - \vec{P}}{r^3} \right] & r > \end{cases}$

2 • $r < R$ $\quad \vec{E}_{int} = \vec{E_a} + \vec{E}_{m,int} = \vec{E_a} - \dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$ avec $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_{int}$

d'où $\vec{E}_{int} = \vec{E_a} - \dfrac{\cancel{\varepsilon_0}\chi_e \vec{E}_{int}}{3\cancel{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{int} = \dfrac{3\vec{E_a}}{3+\chi_e}}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \dfrac{3\chi_e}{3+\chi_e} \vec{E_a}}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{D}_{int} = \dfrac{3\varepsilon}{3+\chi_e} \vec{E_a} = \dfrac{3(1+\chi_e)}{3+\chi_e} \varepsilon_0 \vec{E_a}}$

2 • $r > R$ $\quad \vec{E}_{ext} = \vec{E_a} + \vec{E}_{m,ext} = \vec{E_a} + \dfrac{R^3}{3\varepsilon_0 r^3} \left[3(\vec{P}\cdot\vec{e_r})\vec{e_r} - \vec{P} \right]$

4

$$\vec{D}_{ext} = \varepsilon_0 \vec{E}_{ext} = \varepsilon_0 \vec{E_a} + \frac{R^3}{3r^3} \left[3\left(\frac{3\chi_e \varepsilon_0}{3+\chi_e} \vec{E_a}\cdot\vec{e_r} \right)\vec{e_r} - \frac{3\chi_e \varepsilon_0 \vec{E_a}}{3+\chi_e} \right]$$