– un indice de réfraction :

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \tag{8}$$

soit :

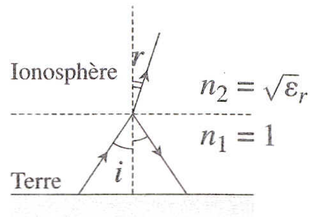
$$n = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m\,\varepsilon_0\,\omega^2}}$$

6) La loi de Descartes :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

s'écrit ici :

$$\sin i = \sqrt{\varepsilon_r}\,\sin r.$$



Il y a réflexion totale lorsque r atteint la valeur $\pi/2$, auquel cas :

$$\sin\alpha = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

On en déduit :

$$\cos\alpha = \frac{\omega_p}{\omega} = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}\,\frac{1}{\omega}.$$

A.N. : $$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1{,}22\cdot 10^{12} \times (1{,}6\cdot 10^{-19})^2}{9{,}1\cdot 10^{-31} \times 8{,}85\cdot 10^{-12}}}\cdot \frac{1}{2\,\pi \times 14{,}1\cdot 10^6}$$

$$= 0{,}703 \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq 45°$$

6.5. Absorption par les électrons « liés »

1) À la pulsation $\omega = 3\cdot 10^{15}$ rad · s^{-1} correspond une longueur d'onde :

$$\lambda = 2\,\pi\, c/\omega = 0{,}628\ \mu\text{m} \qquad \text{(radiation rouge).}$$

Sur une distance moléculaire (de l'ordre de 1 Å), le terme kz ne varie que de :

$$\frac{2\pi}{\lambda}\, z \simeq \frac{2\,\pi \times 10^{-10}}{0{,}628\cdot 10^{-6}} \simeq 10^{-3}\ \text{rad.}$$

On peut donc négliger la dépendance spatiale en e^{ikz} et écrire le champ électrique $\vec{E}$ sous la forme :

$$\vec{E} = E_0\, e^{i\omega t}\,\vec{u}_x$$

2) L'équation du mouvement de l'électron « lié » est :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2m\Gamma\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + m\,\omega_0^2\,\vec{r} = -e\,E_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\vec{u}_x$$

Le régime stationnaire correspond à une solution particulière de cette équation, de la forme :

$$\vec{r} = r_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\vec{u}_x$$

On en déduit :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = i\,\omega\,\vec{r} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\,\omega^2\,\vec{r}$$

d'où, en remplaçant dans l'équation du mouvement :

$$\vec{r} = \frac{-\,e\vec{E}}{m(\,\omega_0^2 - \omega^2\,) + 2im\,\Gamma\,\omega}$$ 1,5

et :

$$\vec{v} = i\,\omega\,\vec{r} = \frac{-\,i\,\omega\,e\vec{E}}{m(\,\omega_0^2 - \omega^2\,) + 2im\,\Gamma\,\omega}$$ 1,5

$|\vec{v}|$ est maximum pour $\omega = \omega_0$.

3) Le vecteur polarisation $\vec{P}$ est donné par :

$$\vec{P} = NZ(-e)\vec{r} = \frac{NZe^2}{m}\,\frac{\vec{E}}{(\,\omega_0^2 - \omega^2\,) + 2i\,\Gamma\,\omega}$$ 1,5

On en déduit la permittivité complexe relative :

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{NZe^2}{m\varepsilon_0}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\,\Gamma\,\omega}$$ 1,5

4) En posant $\varepsilon_{\mathrm{r}} = \varepsilon' - i\varepsilon''$, puis en identifiant les parties réelles d'une part, et les parties imaginaires d'autre part, on trouve :

$$\varepsilon' = 1 + \frac{NZe^2}{m\varepsilon_0}\,\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\,\omega^2 - \omega_0^2\,)^2 + 4\,\Gamma^2\,\omega^2}$$ 1

$$\varepsilon'' = \frac{NZe^2}{m\varepsilon_0}\,\frac{2\,\Gamma\,\omega}{(\,\omega^2 - \omega_0^2\,)^2 + 4\,\Gamma^2\,\omega^2}$$ 1

ε'' traduit l'absorption du champ $\vec{E}$ par le milieu, qui se manisfeste par un échauffement et donc une perte d'énergie. 0,5

Au voisinage de ω_0, on peut remplacer ω par ω_0, sauf pour $(\,\omega^2 - \omega_0^2\,)^2$ qui devient :

$$(\,\omega + \omega_0\,)^2\,(\,\omega - \omega_0\,)^2 \simeq 4\,\omega_0^2\,(\,\omega - \omega_0\,)^2$$

On obtient alors une expression simplifiée pour ε'', soit :

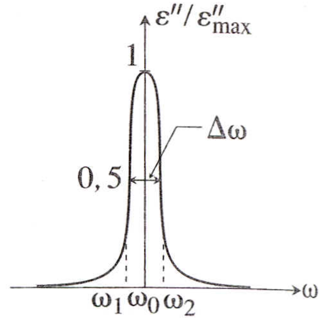
$$\varepsilon'' \simeq \frac{NZe^2}{m\varepsilon_0} \frac{2\,\Gamma\,\omega_0}{4\,\omega_0^2\,(\,\omega - \omega_0\,)^2 + 4\,\Gamma^2\,\omega_0^2}$$

$$\simeq \frac{NZe^2}{m\varepsilon_0} \frac{\Gamma}{2\omega_0} \frac{1}{(\,\omega - \omega_0\,)^2 + \Gamma^2} = \frac{A}{(\,\omega - \omega_0\,)^2 + \Gamma^2}$$

0,5

5) La courbe $\varepsilon''(\omega)$ traduit le phénomène d'absorption. Celle-ci est maximum pour $\omega = \omega_0$. On a alors :

$$\varepsilon''_{\max} = \frac{A}{\Gamma^2}.$$



On peut montrer que cette courbe est très étroite, en comparant sa largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ à ω_0. Les pulsations ω_1, ω_2 correspondantes sont données par :

$$\frac{A}{(\,\omega - \omega_0\,)^2 + \Gamma^2} = \frac{1}{2} \frac{A}{\Gamma^2} \Rightarrow (\,\omega - \omega_0\,)^2 = \Gamma^2$$

2

ce qui donne :

$$\omega_1 = \omega_0 - \Gamma \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 + \Gamma$$

D'où la largeur :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\Gamma = 6 \cdot 10^{-6}\omega_0$$

I)

a) Concentration des atomes de Fer dans le disque :

+ b)

$$n = \frac{\rho}{A} \times N_a = \frac{8 \times 6,02 \times 10^{23}}{56} = 0,86 \times 10^{23}\ cm^{-3}$$
$$= 0,86 \times 10^{29}\ m^{-3}$$

0,5

Aimantation volumique : $\vec{M_s} = 2 \times \mu_B \times n$ 0,5

$\mu_B = 9,27 \times 10^{-24}\ A.m^2$

d'où $M_s = 2 \times 9,27 \times 0,86 \times 10^5 = 1,59 \times 10^6\ A.m^{-1}$ 0,5

et $\mu = V \times M_s = \pi R^2 h \times M_s$

$= \pi \times 10^{-4} \times 10^{-3} \times 1,59 \times 10^6 \simeq 0,5\ A.m^2$ 0,5

b)

on a $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\,\frac{(\vec{\mu}.\vec{r})\,\vec{r}}{r^2} - \vec{\mu}\right]$ 0

$\vec{\mu} = \mu\vec{e_3}$ et $\vec{r} = r\vec{e_3}$

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\mu\vec{e_3} - \mu\vec{e_3}\right] = \frac{\mu_0\mu}{2\pi r^3}\vec{e_3}$ 0,5

$B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0,5}{2\pi \times 10^{-3}} = 10^{-4}\ T = 0,1\ mT$ 0,5

II

a) Sur les faces normales du disque : $\vec{n_1} = \vec{e_3}$ et $\vec{n_2} = -\vec{e_3}$

et $\vec{J_s} = \vec{M_s} \wedge \vec{n}_{ext} \Rightarrow \vec{J_s} = \vec{0}$ sur les faces normales.

1

b) $\vec{n_3} = \vec{e_\rho}$ $\vec{M_s} = M_s\vec{e_3}$

$\Rightarrow \vec{J_s} = M_s\vec{e_\varphi}$ 1

c) $I = J_s \times h = M_s \times h = 1,6 \times 10^6 \times 10^{-3} = 1,6\ KA$ 1

III

a) $$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, \overrightarrow{dl} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\overrightarrow{dl} \begin{vmatrix} 0 \\ R d\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{r} \begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{dl} \wedge \vec{r} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 d\varphi \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R^2 d\varphi}{R^3} \vec{e_3} = \frac{\mu_0 I \, d\varphi}{4\pi R} \vec{e_3}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B_0} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e_3} \quad 1$$

b) $$B_0 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1{,}6 \times 10^{3}}{2 \times 10^{-2}} = 2\pi \times 1{,}6 \times 10^{-2} = 0{,}1 \, T \quad 1$$

c) $$\vec{H} = \frac{\overrightarrow{B_0}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{M_s \times h}{2R} - M_s$$

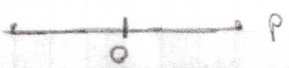
$$= M_s \left(\frac{h}{2R} - 1 \right) \quad 0{,}5$$

$$H = \left(\frac{10^{-3}}{2 \times 10^{-2}} - 1 \right) M_s = -0{,}95 \, M_s \quad 0{,}5$$

IV

a) $\cdot O_1$

$$P \begin{vmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad O_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{PO_1} \begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$$



$$\overrightarrow{dl} \begin{vmatrix} 0 \\ R d\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{PO_1} \begin{vmatrix} -R \\ 0 \\ z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{PO_1} = \begin{vmatrix} Rz \, d\varphi \\ 0 \\ R^2 d\varphi \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\left(Rz \, d\varphi \, \vec{e_\rho} + R^2 d\varphi \, \vec{e_3} \right)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad 0{,}5$$

d'où $dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2 d\varphi}{(R^2+z^2)^{3/2}} \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2 d\varphi}{z^3}$

d'où

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2 z^3}$$ – 0,5

A.N :

$$B_z = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1{,}6 \times 10^3 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-3}}$$

$$= 2\pi \times 1{,}6 \times 10^{-5} = 0{,}1 \text{ mT}$$ –

Résultat identique au I) c)