Texte 3 : Propriétés électriques d'une vapeur d'hydrogène monoatomique

Un atome d'hydrogène est modélisé par une distribution sphérique de charge uniformément répartie en volume (rayon a, charge totale $-e < 0$) représentant l'électron, centrée en O sur le proton assimilé à une charge ponctuelle $+e$. En raison de la faible inertie de l'électron (masse $m_e << m_p$ où m_p est la masse du proton), on admettra que la sphère électronique peut se mouvoir rigidement par rapport au noyau.

1- polarisabilité électronique de l'atome en champ statique

L'atome est soumis à un champ électrique $\vec{E}_{loc}$ (champ local) constant. On se propose de déterminer la position d'équilibre O' du centre de la sphère électronique dans le champ $\vec{E}_{loc}$.

1.1 Calculer le champ électrique $\vec{E}_e(O)$ créé au point O par la sphère centrée en O', puis la force électrique $\vec{F}_{e \to p}$ exercée par l'électron sur le proton.

1.2 En déduire la force $\vec{F}_{p \to e}$ exercée par le proton sur l'électron. Montrer que celle-ci s'écrit sous la forme d'une force de rappel de la forme $\vec{F}_{p \to e} = -k\vec{r}$ où $\vec{r}$ repère la position de l'électron par rapport au proton et k est une constante positive qui s'exprime en fonction de a et des constantes e et ϵ_0.

1.3 Ecrire la condition d'équilibre de l'électron soumis à $\vec{E}_{loc}$. En déduire l'expression de la position d'équilibre de l'électron $\vec{r}_{eq}$ en fonction de $\vec{E}_{loc}$. Si on supprime le champ local, pourquoi l'électron effectue-t-il un mouvement harmonique autour du proton ? Quelle en est la pulsation ω_0 ?

1.4 Donner la définition du moment dipolaire électrique $\vec{p}$ de l'atome. Etablir la relation entre $\vec{p}$ et $\vec{E}_{loc}$. En déduire l'expression de la polarisabilité électronique α_{el} de l'atome en fonction de a.

1.5 Application numérique : calculer les valeurs de ω_0 et α_{el}.
On donne : $a = 0,53\,\text{Å}$, $e = 1,6 \times 10^{-19}\,\text{C}$, $m_e = 0,91 \times 10^{-30}\,\text{kg}$, $\epsilon_0 = 1/(36\pi \times 10^9)\,\text{F/m}$.

2- Permittivité électrique statique d'une vapeur diluée

Une vapeur d'hydrogène atomique de densité volumique $n_V = N/V$ est placée dans un champ électrique appliqué constant. On désigne par $\vec{E}$ le champ macroscopique régnant dans la vapeur.

2.1 Donner la relation entre le vecteur polarisation volumique $\vec{P}$ de la vapeur et le champ local $\vec{E}_{loc}$. On se place dans la suite dans le cadre du modèle de Lorentz. En déduire alors la relation entre $\vec{E}_{loc}$ et $\vec{E}$.

2.2 Quelle condition la densité volumique n_V de la vapeur doit vérifier pour que la correction de champ local ne soit pas nécessaire ?

2.3 En déduire la relation entre la permittivité diélectrique relative ϵ_r d'une vapeur diluée et la polarisabilité électronique α_{el} d'un atome. Calculer numériquement $(\epsilon_r - 1)$ pour $n_V = 10^{22}\,\mathrm{m}^{-3}$. Commenter.

3- puissance dissipée en régime harmonique

La vapeur est soumise à un champ harmonique de pulsation ω. Le champ macroscopique dans le milieu s'écrit $\vec{E} = \mathcal{R}e(\underline{\vec{E}})$ où $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0\, e^{-i\omega t}$.

3.1 Ecrire l'équation de mouvement d'un électron atomique, dont la position $\vec{r}$ est repérée par rapport au noyau. On tiendra compte de l'amortissement du mouvement en introduisant le temps de relaxation τ.

3.2 On recherche des solutions forcées de la forme $\underline{\vec{r}} = \underline{\vec{r}}_m\, e^{-i\omega t}$. Montrer que la susceptibilité diélectrique complexe de la vapeur se met sous la forme

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \frac{n_V e^2}{m_e \epsilon_0} \times \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}$$

où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur atomique. Tracer $\mathcal{R}e[\underline{\chi}_e]$ et $\mathcal{I}m[\underline{\chi}_e]$ en fonction de ω.

3.3 On se place dans la suite à résonance : $\omega = \omega_0$. Calculer les parties réelle $\epsilon_{r,1}$ et imaginaire $\epsilon_{r,2}$ de la constante diélectrique relative complexe de la vapeur. Commenter le signe de $\epsilon_{r,2}$.

3.4 Calculer la vitesse de l'électron. En déduire la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ cédée par le champ à la vapeur et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{V}{2} \omega_0 \epsilon_0 \epsilon_{r,2} \vec{E}_0^2$$

A quel type de phénomène est associé $\epsilon_{r,2}$?

Rappel : $< AB > = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{A}_m \underline{B}_m^*)$ *si* $\underline{A} = \underline{A}_m\, e^{-i\omega t}$ *et* $\underline{B} = \underline{B}_m\, e^{-i\omega t}$