Texte 2 : Aimantation

Exercice 1 : Champ magnétique créé par une boule aimantée

Question préliminaire : Déterminer le champ électrique que créerait une boule de rayon R uniformément chargée par une densité volumique ρ_0.

Une boule magnétique homogène de rayon R présente une aimantation $\vec{M}$ uniforme et stationnaire dirigée selon (Oz).

1- Le potentiel vecteur créé par la boule aimantée peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{A}_m(N) = \frac{\mu_0\epsilon_0}{\rho_0}[\vec{M} \wedge \vec{E}^*(N)]$$

où $\vec{E}^*$ correspond au champ électrique que créerait une boule de même rayon chargée de densité volumique de charge uniforme ρ_0.

a) En déduire le potentiel vecteur $\vec{A}_{m,ex}(N)$ créé par la boule uniformément aimantée à l'extérieur de la boule. Montrer qu'il s'exprime simplement en fonction du moment dipolaire magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de la boule.

b) En déduire les composantes du champ magnétique créé par la boule aimantée $\vec{B}_{m,ex}(N)$. On utilisera l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques.

c) En utilisant la même méthode que précédement, montrer que le champ magnétique à l'intérieur de la boule s'écrit $\vec{B}_{m,in} = \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}$.

2- La boule est composée d'un matériau linéaire, homogène et isotrope (lhi). La boule, placée dans un champ magnétique appliqué $\vec{B}_a$ uniforme selon z, acquiert une aimantation $\vec{M}$ uniforme selon (Oz).
a) Vérifier les relations de continuité auxquelles satisfont le champ $\vec{B}$ et l'excitation magnétique $\vec{H}$ à la traversée de la surface.
b) Quelle est la topologie des courants d'aimantation équivalents ?

On donne : $\vec{rot}\vec{K} = (\vec{rot}\vec{K})_r\,\vec{e}_r + (\vec{rot}\vec{K})_\theta\,\vec{e}_\theta + (\vec{rot}\vec{K})_\varphi\,\vec{e}_\varphi$ *avec*
$(\vec{rot}\vec{K})_r = [\partial(K_\varphi\, sin\theta)/\partial\theta - \partial K_\theta/\partial\varphi]/(r\, sin\theta)$
$(\vec{rot}\vec{K})_\theta = [(1/sin\theta)\,\partial K_r/\partial\varphi - \partial(rK_\varphi)/\partial r]/r$
$(\vec{rot}\vec{K})_\varphi = [\partial(rK_\theta)/\partial r - \partial K_r/\partial\theta]/r$

Exercice 2 : Cylindre et aimantation non uniforme

Un fil rectiligne conducteur de rayon R et de susceptibilité magnétique $\chi_m \neq 0$ [matériau magnétique, linéaire, homogéne et isotrope (lhi)] est parcouru par un courant volumique uniforme d'intensité totale I dans la direction z. Le vide, de susceptibilité magnétique $\chi_v = 0$, occupe le reste de l'espace $\rho > R$. On suppose que le fil a une longueur infinie.

1- Donner l'expression de la densité volumique de courant $\vec{j}$ parcourant le fil.

2- En utilisant l'équation de Maxwell-Ampére sous sa forme intégrale, déterminer l'excitation magnétique $\vec{H}$ dans tout l'espace : (i) $\rho \leq R$ et (ii) $\rho > R$. Tracer $||\vec{H}||$ en fonction de ρ.

3- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ et le champ d'aimantation $\vec{M}$ dans tout l'espace : (i) $\rho \leq R$ et (ii) $\rho > R$. Tracer $||\vec{B}||$ et $||\vec{M}||$ en fonction de ρ.

4- Vérifier les conditions aux limites auxquelles satisfont $\vec{B}$ et $\vec{H}$ en $\rho = R$.