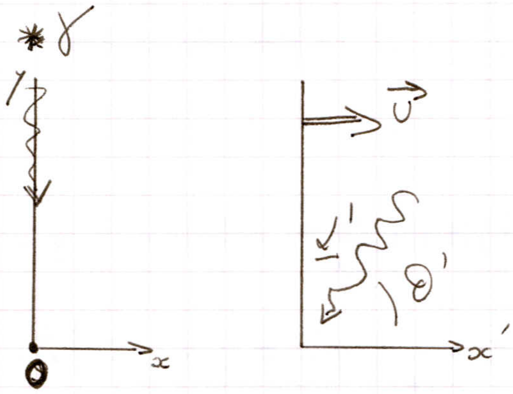
Exo 3 Aberration des étoiles en cinématique galiléenne

1)



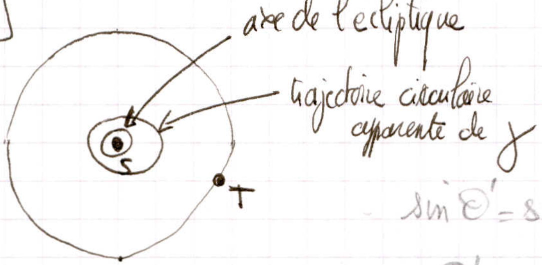
$$\vec{v_\ell} = \vec{v_\ell}' + \vec{u}$$

projetons $0 = v'_{\ell x} + u \quad (x)$

$$-v_\ell = v'_{\ell y} + 0 \quad (y)$$

$$\tan\theta' = \frac{v'_{\ell y}}{v'_{\ell x}} = \frac{-v_\ell}{-u} = \frac{v_\ell}{u}$$

2) voir figure.



Bradley $\Rightarrow$ mesure $2\alpha'$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \cos\alpha' \\ \cos\theta' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \sin\alpha'\end{array}\right\}$$

$$\alpha' = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

$$\tan\alpha' = \frac{u}{v_\ell} \Rightarrow v_\ell = \frac{u}{\tan\alpha'}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha' = 20 \text{ secondes d'arc} = 10^{-4}\,\text{rad} \quad \left(\frac{1}{3}^{\circ}\right) \\ u = 30.10^3\,\text{ms}^{-1}\end{array}\right\} \quad v_\ell \sim \frac{u}{\alpha'} = \frac{30\ 10^3}{10^{-4}} = 3\ 10^8\,\text{m/s}$$

3) Production de ^{26}Al dans notre galaxie

Raie γ à 1,8 MeV $\quad ^{26}Al$ ($T_{1/2}$ = 1 million d'années)

$f_{supernovae} = 0{,}03$

$\phi_\gamma = 5\ 10^{-4}\ s^{-1}\ cm^{-2}$

$m_{Al\ \text{éjecté}} = 6\ 10^{-5}\ M_\odot$

1) Emission stationnaire

N : nbre de noyaux ^{26}Al

$$\frac{dN}{dt} = \underbrace{-\frac{N}{\tau}}_{\text{décroissance radioactive}} + \underbrace{Y}_{\text{terme source (production)} = cste}$$

---

③

$\Rightarrow$ résoudre l'équation $\quad \frac{dN}{dt} + \frac{N}{\tau} = Y$

$N(t)$: SGE = SSSM + SPE

$$\begin{cases} \text{SSSM} : & \frac{dN}{dt} + \frac{N}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow N(t) = C e^{-t/\tau} \\ \text{SPE} : & \frac{N}{\tau} = Y \quad \Rightarrow N = \tau Y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ SGE : $\quad N(t) = Ce^{-t/\tau} + \tau Y \quad$ + CI $\quad t=0 ;\ N(0) = 0$

$\Rightarrow C = -\tau Y$

soit finalement $\quad N(t) = \tau Y (1 - e^{-t/\tau})$

or $\quad \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \sim 1{,}44\ 10^6$ ans $\qquad t_{galaxie} \sim 1{,}5\ 10^{10}$ ans $\gg \tau$

$\Rightarrow e^{-t_{galaxie}/\tau} \sim 0$

soit $\quad N(t) = Y\tau = cste \quad \Rightarrow$ stationnaire

2) Luminosité

luminosité = nbre de photon par seconde : $\dot{N}_\gamma$

$\Rightarrow$ seul compte le terme source (1 Al produit, 1 décroissance, 1 γ)

$$\dot{N}_\gamma = Y = \left(\frac{N}{\tau}\right) = \frac{f_{supernovae} \times m_{Al\ \text{éjecté}} \times \mathcal{N}_A}{M_{Al}}$$

$$\text{AN} : \dot{N}_\gamma = \frac{0{,}03 \times 6\ 10^{-5} \times 2\ 10^{33} \times 6{,}022\ 10^{23}}{365{,}25 \times 24 \times 3600 \quad 26} = 2{,}64\ 10^{42}\ \gamma/s$$

3) Flux de γ au niveau de la Terre

ϕ_γ : photons $s^{-1}\,cm^{-2}$ émission supposée isotrope.

$$\phi_\gamma = \frac{\dot{N}_\gamma}{4\pi d^2}$$

d : distance Terre / centre galactique ; d = 8 kpc

AN : $\phi_\gamma = \frac{2{,}64\ 10^{42}}{4\pi(8\ 10^3 \times 3\ 10^{18})^2} = 3{,}65\ 10^{-4}\ s^{-1}\,cm^{-2}$

en accord avec les observations ($5\ 10^{-4}\ s^{-1}\,cm^{-2}$)

différence produite par les étoiles dites WR (Wolf-Rayet)

---

4) Flux de la raie à 511 keV au niveau de la Terre

82 % Al donne $\beta^+ (e^+)$

annihilation suivant $e^+ + e^- = 2\gamma_{511\,keV}$

$\Rightarrow \phi_{511\,keV} = 0{,}82 \times 2 \times \phi_{\gamma\,exp} = 1{,}64\ \phi_{\gamma\,exp}$ AN : $\phi_{511\,keV} = 8{,}2\ 10^{-4}\ s^{-1}\,cm^{-2}$

Rem : exp^t $\phi_{511\,keV} \simeq 2\ 10^{-3}\ s^{-1}\,cm^{-2}$ $\Rightarrow$ d'autres sources contribuent

ex : ^{56}Co, ^{44}Ti, ^{22}Na, p+p, $\gamma + \Gamma$

1° – a)

Pour le jumeau B, lié à la terre, le voyage de A a duré $T = 36 - 26 = 10$ ans, la phase aller et la phase retour ayant même durée $\frac{T}{2} = 5$ ans.

• Donc la durée du voyage mesurée par l'astronaute A est,

– à l'aller : $\frac{T}{2}\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (temps propre)

– au retour : $\frac{T}{2}\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (temps propre),

soit au total $$\boxed{T' = T\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Application numérique : $T' = 10\sqrt{1 - (0{,}6)^2} = 8$ **ans.**

Donc, à la fin du voyage, l'âge de A sera $26 + 8 =$ **34 ans.**

Le voyageur A a rajeuni de 2 ans par rapport à son frère B resté sur terre.

1° – b)

Le paradoxe des jumeaux apparaît si on raisonne symétriquement par rapport à l'astronaute A qui devrait alors penser que B est rajeuni à la fin du voyage ; or ce paradoxe part d'un raisonnement faux. En effet, le jumeau terrestre B n'assiste pas à la phase accélérée lors du retour de A ; donc il y a dissymétrie entre A et B, et c'est bien le jumeau A qui a quitté la terre qui revient plus jeune que B (que l'on raisonne d'après le jumeau A ou d'après le jumeau B).

2° Le jumeau terrestre B recevra, à cause de l'effet Doppler,

– les signaux émis par A pendant la phase aller, avec la fréquence $\nu_1 = \nu \sqrt{\dfrac{1 - v/c}{1 + v/c}}$.

– les signaux émis par A pendant la phase retour, avec la fréquence $\nu_2 = \nu \sqrt{\dfrac{1 + v/c}{1 - v/c}}$.

Or, à la fin de la phase aller : $t = \dfrac{T}{2}$, le jumeau A est à la distance $vt = \dfrac{vT}{2}$ de B ; donc le dernier éclair de la phase aller met le temps $\dfrac{vT}{2c}$ pour parvenir à B.

Aussi, B reçoit les signaux de la phase aller pendant un temps

$$t_1 = \frac{T}{2} + \frac{vt}{2c} = \frac{T}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

et les signaux de la phase retour pendant un temps

$$t_2 = \frac{T}{2} - \frac{vt}{2c} = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

On en déduit le nombre de battements du cœur de A, mesurés par le jumeau terrestre B :

$$n_{A/B} = \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 = \frac{\nu T}{2}\left[\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}\left(1 + \frac{v}{c}\right) + \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\left(1 - \frac{v}{c}\right)\right]$$

soit
$$n_{A/B} = \nu \cdot T\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{1}$$

Or le nombre de battements du cœur de B, mesuré par B, pendant la durée T du voyage est

$$n_{B/B} = \nu T \tag{2}$$

En conclusion, d'après (1) et (2) , on a

$$\boxed{n_{A/B} = n_{B/B}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < n_{B/B}}$$

Par rapport au jumeau terreste B, son cœur a battu νT fois alors que celui de son frère A a battu $\nu T\sqrt{1 - v^2/c^2}$ fois au cours du voyage. Donc le rajeunissement de A est réel, puisqu'il est confirmé par le nombre de battements du cœur.

3° • Pour le jumeau terrestre A, la durée du voyage aller-retour de B est T_1 .Compte tenu des vitesses aller (v) et retour ($4v/3$), les durées respectives des phases aller et retour, mesurées par A, sont : $4T_1/7$ et $3T_1/7$.

• Les durées du voyage, mesurées par B en temps propre, sont alors

– à l'aller $\dfrac{4T_1}{7}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$

– au retour $\dfrac{3T_1}{7}\sqrt{1-\left(\dfrac{4v}{3c}\right)^2}$

La durée totale du voyage, mesurée par B, est donc

$$\frac{T_1}{7}\left[4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+3\sqrt{1-\left(\frac{4v}{3c}\right)^2}\right] < T_1.$$

• Ecrivons qu'à la fin de ce voyage, B et A ont de nouveau même âge, (donc B a rajeuni de 2 ans au cours de son voyage)

$$\frac{T_1}{7}\left[4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+3\sqrt{1-\left(\frac{4v}{3c}\right)^2}\right]+2 = T_1.$$

Application numérique : $\dfrac{T_1}{7}[4 \times 0{,}8 + 3 \times 0{,}6] + 2 = T_1$ soit $T_1 = 7$ ans.

Donc A et B auront l'âge commun $34 + 7 =$ **41 ans.**