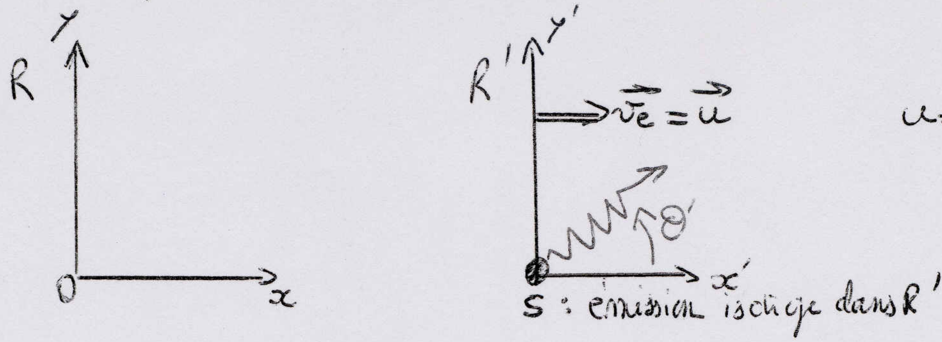
② Emission anisotrope d'une source en mouvement



$u = 0{,}8c$

1) $v'_x = c\cos\theta'$ 0,5

Transformations des vitesses $\quad v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + \dfrac{u v'_x}{c^2}}$ 0,5

$v_x = c\cos\theta$ 0,5

donc $\quad c\cos\theta = \dfrac{c\cos\theta' + u}{1 + \dfrac{u}{c}\cos\theta'} \iff \cos\theta = \dfrac{c\cos\theta' + u}{c + u\cos\theta'}$ 1

$\theta' = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{u}{c} = \beta$

Rem : β_e petit $\quad \theta = \theta'$

2) émission isotrope dans R' $\Rightarrow \left.\dfrac{dN}{d\Omega'}\right|_{R'} = \dfrac{N}{4\pi}$ ← en stéradians : angle solide total

émission dans R $\quad \left.\dfrac{dN}{d\Omega}\right|_R = \dfrac{dN}{d\Omega'}\dfrac{d\Omega'}{d\Omega} = \dfrac{N}{4\pi}\dfrac{d\Omega'}{d\Omega}$ 0,5

avec $\quad d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$
$\quad\;\; d\Omega' = 2\pi\sin\theta'\, d\theta'$
$\Big\}\quad d\Omega = -2\pi\, d(\cos\theta)$
$\quad\;\; d\Omega' = -2\pi\, d(\cos\theta')$

$$\left.\frac{dN}{d\Omega}\right|_R = \frac{N}{4\pi}\,\frac{d(\cos\theta')}{d(\cos\theta)}$$ 0,5

or question précédente $\rightarrow \cos\theta' = \dfrac{\cos\theta - \beta_e}{1 - \beta_e\cos\theta}$

$$d(\cos\theta') = \frac{d(\cos\theta)(1-\beta_e\cos\theta) + (\cos\theta - \beta_e)\beta_e\, d(\cos\theta)}{(1-\beta_e\cos\theta)^2}$$

$$= d(\cos\theta)\left(\frac{1-\beta_e^2}{(1-\beta_e\cos\theta)^2}\right) = \frac{1}{\gamma_e^2(1-\beta_e\cos\theta)^2}$$ 0,5

donc $\left.\dfrac{dN}{d\Omega}\right|_R = \dfrac{N}{4\pi} \dfrac{1}{\gamma_e^2(1-\beta_e\cos\theta)^2}$ 0,5

soit $dN = \dfrac{N\,d\Omega}{4\pi\gamma_e^2(1-\beta_e\cos\theta)^2}$

$\gamma_e = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$

3) $f(\theta) = \dfrac{4\pi}{N}\dfrac{dN}{d\Omega} = \dfrac{1}{\gamma_e^2(1-\beta_e\cos\theta)^2}$

$f'(\theta') = \dfrac{4\pi}{N}\dfrac{dN}{d\Omega'} = 1$

$\beta_e = 0{,}8 \Rightarrow \gamma_e = 1{,}67$

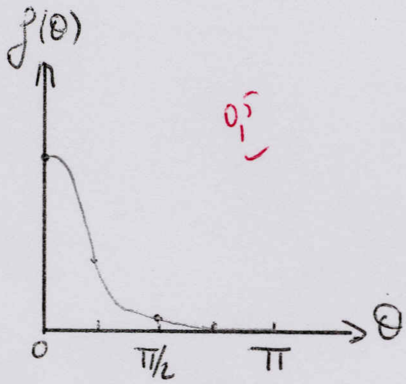
$f(0) = 9$

$f(\pi/4) = 1{,}9$

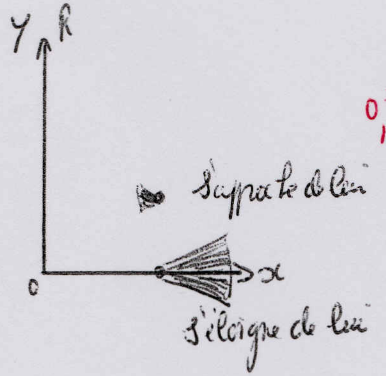
$f(\pi/2) = 0{,}36$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0{,}15$

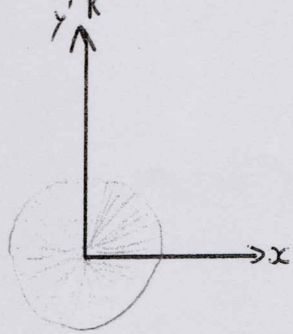
$f(\pi) = 0{,}11$



0,5



0,5



Solution

1° – a)

Le référentiel (R^*) du centre de masse se confond ici avec le référentiel où le méson π^0 est au repos.

Dans ce référentiel (R^*),

– la quantité de mouvement totale des photons produits est nulle (par définition de R^*) : $\vec{p}_1^{\,*} + \vec{p}_2^{\,*} = 0$, soit en module :

$$p_1^* = p_2^* \quad \text{ou} \quad \frac{E_1^*}{c} = \frac{E_2^*}{c} \tag{1}$$

– l'énergie totale des photons produits est :

$$E_1^* + E_2^* = m c^2 \tag{2}$$

D'après (1) et (2), dans (R^*), les deux photons sont émis dans des directions opposées avec la même énergie. 0,5

$$\boxed{E_1^* = E_2^* = \frac{1}{2} m c^2}$$ 1.

Application numérique : $E_1^* = E_2^* = $ **67,5 MeV** 0,5

1° – b)

Dans (R^*), les composantes du quadrivecteur $\left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right)$ sont :

– pour le photon γ_1 :

$$\left[p_{1x}^* = \frac{E_1^*}{c}\cos\theta^*,\ p_{1y}^* = \frac{E_1^*}{c}\sin\theta^*,\ p_{1z}^* = 0,\ \frac{E_1^*}{c}\right]$$

– pour le photon γ_2 :

$$\left[p_{2x}^* = -\frac{E_2^*}{c}\cos\theta^*, p_{2y}^* = -\frac{E_1^*}{c}\sin\theta^*, p_{2z}^* = 0,\ \frac{E_2^*}{c}\right]$$

La formule de transformation de la quatrième composante du quadrivecteur $\left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right)$ lors du passage de (R^*) à (R) s'écrit :

– pour le photon γ_1 :

$$\frac{E_1}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{E_1^*}{c} + \beta p_{1x}^*\right), \text{ soit } \quad E_1 = E_1^* \frac{1 + \beta\cos\theta^*}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

– pour le photon γ_2 :

$$\frac{E_2}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{E_2^*}{c} + \beta p_{2x}^*\right), \quad \text{soit} \quad E_2 = E_2^* \frac{1-\beta\cos\theta^*}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

On en déduit les énergies des photons γ_1 et γ_2 dans (R) :

$$\boxed{E_1 = \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{1+\beta\cos\theta^*}{\sqrt{1-\beta^2}}} \; 0,5 \quad (3) \quad \text{et} \quad \boxed{E_2 = \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{1-\beta\cos\theta^*}{\sqrt{1-\beta^2}}} \; 0,5 \quad (4)$$

pour σ

Application numérique : On a :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{donc} \quad \beta = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} = 0,80 \, ;$$

on obtient E_1 = **157,5 MeV** et E_2 = **67,5 MeV** [illegible]

1° – c)

D'après (3) et (4), on obtient pour chacun des photons (γ_1 par exemple)

– l'énergie minimale ($\theta^* = \pi$) :

$$E_{\min} = \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{E_{\min} = \frac{mc^2}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}} \; 0,5$$

– l'énergie maximale ($\theta^* = 0$) :

$$E_{\max} = \frac{mc^2}{2} \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{E_{\max} = \frac{mc^2}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} \; 0,5$$

Application numérique : $E_{\min}$ = **22,5 MeV**, $E_{\max}$ = **202,5 MeV**

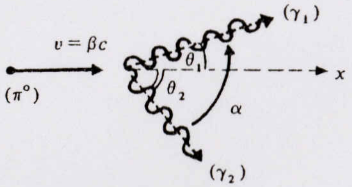


Figure II, 16

2°

a) • La formule de transformation de Lorentz relative à la quatrième composante du quadrivecteur impulsion-énergie de chaque photon s'écrit, lorsqu'on passe de (R) à (R^*),

– pour le photon γ_1 :

$$\frac{E_1^*}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\frac{E_1}{c} - \beta p_{1x}\right]$$

avec $$p_{1x} = \frac{E_1}{c}\cos\theta_1$$

soit $$E_1^* = \frac{mc^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot E_1 (1-\beta\cos\theta_1),$$

donc $$\boxed{E_1 = \frac{mc^2}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta_1}} \; 0,5 \quad (5)$$

– pour le photon γ_2 :

$$\frac{E_2^*}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\frac{E_1}{c} - \beta p_{2x}\right], \quad \text{avec} \quad p_{2x} = \frac{E_2}{c}\cos\theta_2,$$

soit $$E_2^* = \frac{mc^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} E_2 (1-\beta\cos\theta_2),$$

donc $$\boxed{E_2 = \frac{mc^2}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta_2}} \; 0,5 \quad (6)$$

b) L'énergie E_1 (ou E_2) est minimale pour $\theta_1 = \pi$ (ou $\theta_2 = \pi$) et vaut, d'après (5) : 0,5

$$E_{\min} = \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \frac{mc^2}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

L'énergie E_1 (ou E_2) est maximale pour $\theta_1 = 0$ (ou $\theta_2 = 0$) et vaut d'après (5) :

$$E_{\max} = \frac{mc^2}{2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \frac{mc^2}{2}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

0,5

c) En comparant les expressions (3) et (5) de E_1, on obtient

$$\frac{1+\beta\cos\theta^*}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta_1}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\cos\theta_1 = \frac{\beta+\cos\theta^*}{1+\beta\cos\theta^*}} \; 0,5 \quad (7)$$

On a ainsi obtenu la formule générale de l'effet Doppler.

• En comparant les expressions (4) et (6) de E_2, on obtient de même

$$\frac{1-\beta\cos\theta^*}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta_2},$$

soit $$\boxed{\cos\theta_2 = \frac{\beta - \cos\theta^*}{1 - \beta\cos\theta^*}} \qquad (8)$$

0,5

Remarque : En substituant $\pi + \theta^*$ à θ^* dans (7), on retrouve la relation (8).

Application numérique : $\beta = 0,8$; $\cos\theta^* = 0,5$;

on obtient $$\cos\theta_1 = \frac{13}{14} \quad \text{et} \quad \cos\theta^* = \frac{1}{2} \ ;$$

donc $$\theta_1 = \mathbf{21,8°} \quad \text{et} \quad \theta_2 = \mathbf{-60°}.$$

3° – a)

D'après (7), on a :

$$\sin\theta_1 = \sqrt{1 - \cos^2\theta_1} = \frac{\sin\theta^*\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\cos\theta^*} \qquad (9)$$

et en substituant $\pi + \theta^*$ à θ^*, on obtient :

$$\sin\theta_2 = \frac{-\sin\theta^*\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\cos\theta^*} \qquad (10)$$

• L'angle α, dans (R), entre les directions des deux photons est : $\alpha = \theta_1 - \theta_2$, donc $\cos\alpha = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2$ soit, d'après (7), (8), (9) et (10),

$$\cos\alpha = \frac{\beta^2 - \cos^2\theta^*}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*} - \frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta^*}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*}$$

ou $$\cos\alpha = \frac{\beta^2(1 + \sin^2\theta^*) - 1}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*} \ ;$$

On en déduit

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*}$$

soit $$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*}}} \qquad (11)$$

0,5

Application numérique : On obtient $\sin\frac{\alpha}{2} = 0,655$ et $\alpha \simeq \mathbf{81°,8}$ résultat en accord avec $\alpha = \theta_1 - \theta_2 = 21,8 - (-60) = \mathbf{81,8°}$.

0,5

3° – b)

En multipliant membre à membre (3) et (4), on obtient :

$$E_1 E_2 = \frac{m^2c^4}{4} \cdot \frac{1 - \beta^2\cos^2\theta^*}{1-\beta^2}, \quad \text{soit} \quad \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\cos^2\theta^*}} = \frac{mc^2}{2\sqrt{E_1E_2}}$$

et, d'après (11), $$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{mc^2}{2\sqrt{E_1E_2}}} \qquad (12)$$

0,5

$2^è$ *méthode* : On exprime, au cours de la désintégration dans (R), les lois de :

– conservation de l'énergie : $E = E_1 + E_2$

– conservation de l'impulsion : $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

1,5

soit $$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\alpha$$

avec $$p_1 = \frac{E_1}{c} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{E_2}{c} \quad \text{pour les photons}$$

et $$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 = \frac{(E_1+E_2)^2}{c^2} - m^2c^2 \quad \text{pour le méson ;}$$

on en déduit $$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{m^2c^4}{2E_1E_2} \ ;$$

0,5

on retrouve ainsi la relation (12).

3° – c) D'après (12) le demi-angle d'ouverture $\frac{\alpha}{2}$ est minimum lorsque le produit E_1E_2 est maximum ; comme la somme des énergies $E_1 + E_2 = E$ est donnée, le produit $E_1 E_2$ est maximum lorsque ces deux énergies sont égales :

$$E_1 = E_2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\theta_1 = \theta_2} \quad \text{d'après (5) et (6).}$$

L'angle d'ouverture minimale correspond donc à l'émission symétrique des photons γ_1 et γ_2 par rapport à la direction des mésons π^0.

• D'après (12), et compte-tenu de $E_1 = E_2 = \frac{E}{2}$, on obtient

0,5

$$\sin\frac{\alpha_{min}}{2} = \frac{mc^2}{E}, \quad \text{soit} \quad \sin\frac{\alpha_{min}}{2} = \sqrt{1-\beta^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\cos\frac{\alpha_{min}}{2} = \beta}$$

0,5

Application numérique : $\cos\frac{\alpha_{min}}{2} = 0,80$ soit $\alpha_{min} = \mathbf{73°44'}$

• D'après (11), $\beta\cos\theta^* = 0$ soit $\theta^* = \mathbf{90°}$.