Solution

1° – a)

L'énergie cinétique de chaque électron est :

$$T = E - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Introduisons l'énergie cinétique réduite $\alpha = \frac{T}{mc^2} = \frac{Kx}{mc^2}$ (1)

on a donc
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \alpha$$

soit $\frac{v^2}{c^2} = \frac{\alpha(2+\alpha)}{(1+\alpha)^2}$ ou $\boxed{v = \frac{c\sqrt{\alpha(2+\alpha)}}{1+\alpha}}$ (2)

1° – b)

La relation entre la vitesse v et l'abscisse x des électrons est, d'après (1) et (2),

$$v = \frac{c\sqrt{Kx\,(2mc^2 + Kx)}}{mc^2 + Kx} \qquad (3)$$

L'accroissement d'énergie cinétique par unité de longueur de l'accélérateur est $K = \frac{T_f}{\ell} = 14$ MeV/mètre ; donc, dès les premiers mètres de parcours, on a $2mc^2 \ll T = Kx$, et d'après (3), en pratique $\boxed{v \simeq c}$ dès le début de l'accélération.

Si $x = 1$ mètre, on obtient numériquement d'après (3), $v = 0{,}9994\,c$ soit $v \simeq c$ à mieux que 1 ‰ près.

2° • Le référentiel (R') lié aux électrons accélérés n'appartient pas à la classe des repères galiléens utilisés en relativité restreinte. On considère donc le référentiel instantané (R'_t) des électrons, à l'instant t où leur vitesse est v ; entre deux instants très rapprochés la vitesse varie très peu et (R'_t) représente bien le référentiel propre des électrons.

• La longueur "élémentaire" $\mathrm{d}x$ de l'accélérateur (fixe dans R) est liée à la longueur $\mathrm{d}x'$ mesurée dans (R'_t) par la relation de contraction des longueurs

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, ;$$

la longueur ℓ' de l'accélérateur, mesurée par un observateur lié aux électrons, est donc par intégration

$$\ell' = \int dx' = \int_0^{\ell} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dx$$

ou, d'après (1) et (3), $\ell' = \int_0^{\ell} \frac{dx}{1 - \frac{Kx}{mc^2}}$

soit $$\ell' = \frac{mc^2}{K} \ln\left(1 + \frac{K\ell}{mc^2}\right)$$

avec $\frac{K}{mc^2} = \frac{T_f}{\ell mc^2} = \frac{\alpha_f}{\ell}$, donc $\boxed{\ell' = \ell \cdot \frac{\ln(1 + \alpha_f)}{\alpha_f}}$

Application numérique :

$\ell = 3\,000$ m ; $\alpha_f = \frac{T_f}{mc^2} = 82{,}3$; on obtient $\ell' \simeq$ **161,2 m**

3° La longueur d'onde associée aux électrons accélérés ($v \simeq c$) est

$$\lambda = \frac{h}{mv} \simeq \frac{h}{mc}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lambda = \frac{hc}{mc^2}}$$

Application numérique :

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{0{,}51 \times 1{,}6 \cdot 10^{-13}} = 2{,}4 \cdot 10^{-12} \quad m = 0{,}024 \text{ Å}$$

(longueur d'onde du même ordre de grandeur que celle de rayons X durs). On peut donc prévoir l'observation de franges de diffractions dans les mêmes conditions qu'avec les rayons X.

Transformation de Lorentz

1. Le référentiel G est en translation uniforme avec la vitesse $v = 3c/5$ par rapport à G'. Les coordonnées (ct, x) sont données par la transformation de Lorentz associée :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' - \beta ct') \\ ct = \gamma(ct' - \beta x'). \end{array} \right.$$

On a introduit les facteurs relativistes $\beta = v/c = 3/5$ et $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = 5/4$.

Notons que la transformation de G à G' s'obtient simplement en remplaçant β par $-\beta$ dans les expressions ci-dessus.

En particulier, lorsque O passe devant H_1', on a $x' = a$ et $t' = 1$ h d'après l'énoncé.

Le point O correspond à $x = 0$. Grâce à la transformation de Lorentz, on trouve la relation $x' = \beta ct'$. Ainsi, le temps indiqué par H_0 vaut

$$t_1 = \gamma(t' - \beta x'/c) = \gamma(1-\beta^2)t',$$

ou encore

$$\boxed{t_1 = \frac{t'}{\gamma}.}$$

La pendule H_0 indique donc $t_1 = 4/5$ h, soit 48 minutes.

Cet exemple indique la variation (ici contraction) des durées dans un référentiel en mouvement.

L'abscisse dans G' vaut $x' = \beta ct' = a$. Comme $t' = 1$ h, on en déduit $x_1' = a = 3/5$ h.ℓ.

2. Les voyageurs du train ayant des horloges synchronisées, lors de l'événement $E_{(1)}$, ils lisent tous l'heure t_1, soit 48 minutes sur leur propre horloge.

L'horloge H_0' correspond à $x' = 0$. À l'aide de la transformation de Lorentz inverse, on trouve la relation $t' = t/\gamma$. Pour l'événement $E_{(0)}$, l'heure indiquée par H_0' est donc : $t' = t_1/\gamma = 16/25$ h, soit 38 minutes et 24 secondes.

3. L'horloge H_2' se caractérise par $x' = 2a$. En procédant comme dans la question précédente, on trouve les relations

$$x' = 2a = \gamma(x + \beta ct) \quad \text{et} \quad ct' = \gamma(ct + \beta x).$$

L'heure indiquée sur cette horloge vaut donc :

$$\begin{aligned} t_2' &= \gamma\left(t + \beta\left(\frac{2a}{\gamma c} - \beta t\right)\right) \\ &= \frac{t}{\gamma} + \frac{2a\beta}{c}. \end{aligned}$$

À l'instant t_1, elle indique :

$$t'_2 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} + 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{34}{25} = 1{,}36 \text{ h},$$

soit 1 h 21 min 36 s.

4. L'horloge H'_n correspond à $x'_n = na$. On généralise facilement les expressions précédentes et on obtient l'heure indiquée par H'_n lorsque l'heure dans le train est t_1 :

$$\begin{aligned} t'_n &= \frac{t_1}{\gamma} + \frac{na\beta}{c} \\ &= \frac{1}{\gamma^2} + n\beta^2 \quad \text{en heures} \end{aligned}$$

Finalement il vient

$$\boxed{t'_n = 1 + (n-1)\beta^2.}$$

Ainsi, des horloges synchronisées dans un référentiel ne le sont plus dans un autre référentiel.
La notion de simultanéité dépend donc du référentiel.