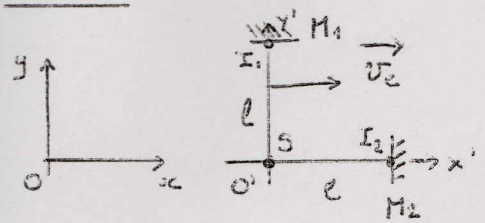
PROBLEME



1

$$E_0 \left|\begin{array}{l} 0\\0\\0\\0 \end{array}\right._{R'} \quad E_1 \left|\begin{array}{l} 0\\ \ell\\0\\ \ell \end{array}\right._{R'} \quad E_2 \left|\begin{array}{l} \ell\\0\\0\\ \ell \end{array}\right._{R'} \quad E_3 \left|\begin{array}{l} 0\\0\\0\\ 2\ell \end{array}\right._{R'} \quad E_4 \left|\begin{array}{l} 0\\0\\0\\ 2\ell \end{array}\right._{R'}$$

$$E_0 \left|\begin{array}{l} 0\\0\\0\\0 \end{array}\right._{R} \quad E_1 \left|\begin{array}{l} \gamma_e\beta_e \ell\\ \ell\\0\\ \gamma_e \ell \end{array}\right._{R} \quad E_2 \left|\begin{array}{l} \gamma_e(\ell+\beta_e\ell)\\0\\0\\ \gamma_e(\ell+\beta_e\ell) \end{array}\right._{R} \quad E_3 \left|\begin{array}{l} 2\gamma_e\beta_e\ell\\0\\0\\ 2\gamma_e \ell \end{array}\right._{R} \quad E_4 \left|\begin{array}{l} 2\gamma_e\beta_e\ell\\0\\0\\ 2\gamma_e \ell \end{array}\right._{R}$$

2 $S_{01}^2 = \ell^2 - \ell^2 = 0$ genre lumière, invariant 0,

3 $\beta_e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\gamma_e = 2$

$c(t'_2 - t'_1) = 0$ simultanés dans R' $c(t_2 - t_1) = \gamma_e\beta_e \ell$ Non simultanés R $t_2 - t_1 = 2,89$ ns

$c(t'_4 - t'_3) = 0$ simultanés dans R' $c(t_4 - t_3) = 0$ La simultanéité est indépendante du réf. si les évé sont localisés au m̂ pt

4 dans R $c\tau_{01} = c\tau_{13} = \gamma_e \ell$ $\cancel{c\tau_{03} = 2\gamma_e \ell}$

1 $c\tau_{02} = \gamma_e(\ell + \beta_e \ell)$ $c\tau_{04} = \gamma_e(\ell - \beta_e \ell)$ $c\tau_{04} = 2\gamma_e \ell$

$\tau_{01} = \tau_{13} = 3,33$ ns
$\tau_{03} = \tau_{04} = 6,66$ ns
$\tau_{02} = 6,22$ ns
$\tau_{04} = 0,44$ ns

5

a)

$$4\text{-}k_1 \left|\begin{array}{c} 0\\ -\frac{\omega_s}{c}\\ 0\\ \frac{\omega_s}{c} \end{array}\right._{R'} \qquad 4\text{-}k_2 \left|\begin{array}{c} -\frac{\omega_s}{c}\\ 0\\ 0\\ \frac{\omega_s}{c} \end{array}\right._{R'}$$

0,5 $\lambda_S = 632,8$ nm

b) 0,5

$\frac{\omega_1}{c} = \gamma_e \frac{\omega_s}{c}$ 1 $\lambda_1 = \frac{\lambda_s}{\gamma_e} = 316,4$ nm UV 0,5

$\frac{\omega_2}{c} = \gamma_e\left(\frac{\omega_s}{c} - \beta_e \frac{\omega_s}{c}\right)$ $\lambda_2 = \frac{\lambda_s}{\gamma_e(1-\beta_e)} = 2361,6$ nm IR

Ex. 30 — Rayonnement Cerenkov ★★

Montrer qu'un électron en mouvement dans le vide ne peut émettre un photon. Dans un milieu matériel, on peut rendre compte de l'interaction entre un photon et le milieu matériel, en attribuant au photon une énergie $E = h\nu$ et une impulsion $\vec{P}$ telle que $P = \frac{nE}{c}$ (n étant l'indice caractéristique du milieu, $n > 1$; $n = 1,33$ pour l'eau) $\vec{P}$ et iE/c formant toujours un quadrivecteur. On considère, dans ce milieu, l'émission d'un photon par un électron en mouvement, appelée émission Cérenkov. Soit m la masse de l'électron et $\vec{v}_1$ sa vitesse initiale, supposée constante, par rapport au référentiel (R) du laboratoire supposé galiléen. Calculer dans ce repère, l'angle d'éjection φ du photon par rapport à la direction de l'électron incident. Montrer que l'émission Cérenkov n'est possible que si v_1 est supérieur à une valeur v_{min} que l'on exprimera ; donner la condition équivalente pour l'énergie E_1 de l'électron incident. La condition $v_1 > v_{min}$ étant réalisée, montrer que l'angle d'éjection φ est inférieur à une valeur φ_{max} que l'on exprimera en fonction de E_1. Exprimer alors l'énergie maximale que peut avoir le photon émis. On se place dans le cas où E_1 est très supérieur à mc^2, exprimer φ_{max} et la longueur d'onde minimale du photon émis ; montrer que l'enveloppe des ondes émises est un cône dont le sommet est l'électron et l'axe son impulsion. Exprimer le demi-angle au sommet α de ce cône, en fonction de n et v_1.

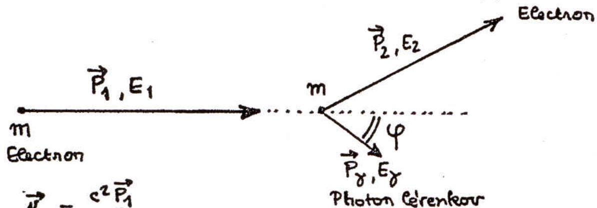
Supposons la réaction $e^- \rightarrow e^- + \gamma$ possible dans le vide. Dans le référentiel du centre de masse on doit donc avoir conservation de l'impulsion totale et de l'énergie totale, soit :

$$\begin{cases} \vec{0} = \vec{P}_e^* + \vec{P}_\gamma^* \\ mc^2 = E_e^* + E_\gamma^* \end{cases} \quad \text{avec} \quad E_e^* = \sqrt{m^2c^4 + p_e^{*2}c^2} \quad \text{et} \quad E_\gamma^* = p_\gamma^* c$$

$p_e^{*2} = p_\gamma^{*2} = p^{*2}$ et $\sqrt{m^2c^4 + p^{*2}c^2} + p^*c = mc^2$ ce qui est impossible

L'énergie ne peut être conservée, et donc la réaction ne peut avoir lieu dans le vide.

Etudions cette émission dans un milieu d'indice n :



$$\vec{v}_1 = \frac{c^2 \vec{P}_1}{E_1}$$

On a donc : $\begin{cases} E_1 = E_\gamma + E_2 \\ \vec{P}_1 = \vec{P}_\gamma + \vec{P}_2 \end{cases}$ Eliminons les caractéristiques de l'électron après l'émission :

$E_2^2 - P_2^2c^2 = (E_1 - E_\gamma)^2 - (\vec{P}_1 - \vec{P}_\gamma)^2 c^2$ or $E_2^2 - P_2^2c^2 = E_1^2 - P_1^2c^2 = m^2c^4$

D'où : $0 = E_\gamma^2 - 2E_1E_\gamma - P_\gamma^2c^2 + 2P_1c.P_\gamma c.\cos\varphi$ et $P_\gamma c = nE_\gamma$

$E_\gamma - 2E_1 - n^2E_\gamma + 2P_1c.n.\cos\varphi = 0$ soit $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{E_\gamma(n^2-1) + 2E_1}{2P_1cn}}$

$\cos\varphi > \dfrac{E_1}{P_1cn}$ L'émission n'est donc possible que si $\dfrac{E_1}{P_1cn} < 1$, donc si :

$v_1 = \dfrac{c^2P_1}{E_1} > \dfrac{c}{n}$ $\boxed{v_1 > v_{min} = \dfrac{c}{n}}$ Condition d'émission Cérenkov $\dfrac{P_1c^2}{E_1}$

Pour qu'il y ait émission Cérenkov il faut que la vitesse de l'électron incident soit supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu. On a donc un phénomène un peu analogue au « bang » sonore produit par un avion se déplaçant à une vitesse supérieure à la vitesse du son dans l'air.

$P_1cn > E_1 \Rightarrow (E_1^2 - m^2c^4)n^2 > E_1^2$ et donc $\boxed{E_1 > \dfrac{n\, mc^2}{\sqrt{n^2-1}}}$

Dans le cas de l'eau ($n \simeq 1{,}33$) : $E_1 > 1{,}52\, mc^2 \simeq 0{,}775$ MeV et $\beta = \frac{v_1}{c} > 0{,}75$

On se place maintenant dans le cas où $v_1 > v_{min} = \frac{c}{n}$

$\cos\varphi > \dfrac{E_1}{P_1cn} = (\cos\varphi)_{min}$ D'où $\boxed{\varphi \leq \varphi_{max} = \operatorname{Arccos} \dfrac{E_1}{n\sqrt{E_1^2 - m^2c^4}}}$

L'énergie du photon émis vaut : $E_\gamma = \dfrac{2P_1cn\cos\varphi - 2E_1}{n^2-1}$

$(\cos\varphi)_{max} = 1$ pour $\varphi = \varphi_{min} = 0$ et donc $E_{\gamma max} = 2\dfrac{P_1cn - E_1}{n^2-1}$

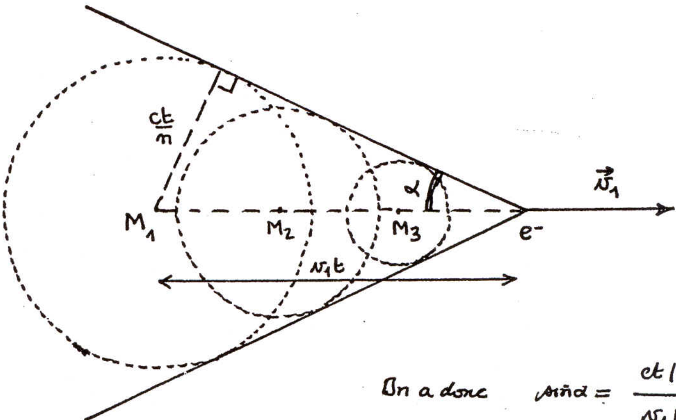
soit $\boxed{E_{\gamma max} = 2\dfrac{n\sqrt{E_1^2 - m^2c^4} - E_1}{n^2-1}}$

Si $E_1 \gg mc^2$ $\boxed{\varphi_{max} \simeq \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{n}}$ soit $41{,}2°$ pour $n = 1{,}33$

$$E_{\gamma\,max} \simeq \frac{2E_1}{n+1} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \qquad \boxed{\lambda_{min} \simeq \frac{(n+1)hc}{2E_1}}$$

Si des photons sont émis à un instant $t=0$ en un point M, la surface d'onde à un instant ultérieur t, est une sphère de centre M et de rayon $\frac{ct}{n}$ puisque $\frac{c}{n}$ représente la vitesse de phase des ondes lumineuses dans ce milieu. L'enveloppe de ces surfaces d'onde, lorsque l'électron se déplace est un cône de lumière de demi-angle au sommet α.

Ecrivons que pendant ce même temps t l'électron s'est déplacé de $v_1 t$



On a donc $\sin\alpha = \dfrac{ct/n}{v_1 t}$

soit $\boxed{\sin\alpha = \dfrac{c}{n v_1} < 1}$ puisque $v_1 > \frac{c}{n}$