UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

L3 LICENCE PHYSIQUE CHIMIE APPLICATION 2007 / 2008
Mention physique fondamentale

Examen de Physique Quantique du 24 juin 2008 - Module 2L50PY1E2

Durée : 2h - Tous documents interdits

Exercice 1

Les progrès des nanotechnologies ont permis de préparer et d'isoler de nombreuses nanoparticules aux propriétés magnétiques intéressantes. Parmi celles-là, la particule Fe_8 a été particulièrement étudiée.

On rappelle la relation entre le moment magnétique $\overrightarrow{M}$ et le moment cinétique total $\vec{J}$ de la particule :

$$\overrightarrow{M} = -g\frac{e}{2m}\vec{J}$$

où *g* -appelé facteur de Landé- vaut 2 dans le cas de Fe_8, *e* est la charge élémentaire et *m* la masse de l'électron. Pour la particule Fe_8, le nombre quantique *J* est égal à 10.

1. Quel est l'autre nombre quantique associé au moment cinétique $\vec{J}$ (définition et valeurs possibles) ?
2. En déduire les valeurs possibles de la projection M_Z de $\overrightarrow{M}$ sur l'axe *Oz*. On pourra utiliser la constante μ_B, appelée magnéton de Bohr, et qui a pour valeur :
$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}.$$

Exercice 2

On considère un spin *1/2*, plongé dans un champ $\boldsymbol{B_0}$ de composantes ($B_0/\sqrt{2}$, 0, $B_0/\sqrt{2}$).

1. Calculer la matrice représentant l'opérateur hamiltonien *H* du système, dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. On posera $\omega_0 = -\gamma B_0/\sqrt{2}$, avec γ le rapport gyromagnétique.

   On rappelle les expressions matricielles des composantes de spin $S_X = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
   $S_Y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $S_Z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de *H*. On notera ces vecteurs $|\Psi_+\rangle$ et $|\Psi_-\rangle$.
3. Le système est dans l'état $|-\rangle$ à l'instant *t* = 0. Quelles valeurs pourraient-on trouver si l'on mesurait l'énergie, et avec quelles probabilités ?
4. Montrer que le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ à l'instant *t* peut s'écrire dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:
$$|\Psi(t)\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\right)|-\rangle.$$
   A cet instant, on mesure S_X. Quelle est la valeur moyenne des résultats que l'on peut obtenir ?

Exercice 3: Ions polymériques colorés

Un modèle simple d'électron dans un puits infini peut être utilisé pour décrire l'état électronique d'un ion moléculaire de formule $(C_pH_{p+2})^-$. Les *p* atomes de carbone (*p* étant impair) sont également séparés d'une distance a = 0,14 *nm* et forment une chaîne linéaire le long de *Ox*. Chaque électron issu des liaisons π se trouve libre de se déplacer sur une longueur $L = p\,a$. Un état électronique $|\Phi_N\rangle$ de cet ion est décrit à partir des états individuels $\varphi_n(x)$ des électrons se déplaçant indépendamment le long de la chaîne.

A) Electron dans un puits infini

Un électron est supposé libre de se déplacer le long d'un segment de longueur L le long de l'axe *Ox*. Son énergie potentielle est assimilée à celle d'un puits de potentiel à une dimension infiniment profond tel que $U(x)$=0 si $|x| < L/2$ et $U(x) = \infty$ si $|x| > L/2$.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps. On introduira les fonctions d'onde $\varphi_n(x)$ et les énergies ε_n. En conjuguant cette expression, montrer que $\varphi_n(x) + \varphi_n^*(x)$ est également solution.
2. Montrer que ces fonctions peuvent être choisies réelles et paires ou impaires.
3. Déterminer les solutions générales correspondant aux fonctions d'onde des états stationnaires. Etablir l'expression des solutions paires et impaires.
4. Montrer que la constante de normalisation s'écrit dans tous les cas $\sqrt{2/L}$.
5. Représenter pour les deux premiers niveaux les densités de probabilité.
6. Déterminer l'expression des niveaux d'énergie ε_n.

B) Electrons dans la chaîne polymérique

7. Combien d'électrons « libres » compte le système ionique ? Compte tenu du principe d'exclusion de Pauli, en déduire la répartition des électrons sur les différents niveaux ε_n.
8. En déduire l'énergie totale E_0 de l'état fondamental $|\Phi_{N=0}\rangle$ de l'ion.

   On donne : $\sum_{n=1}^{s} n^2 = \dfrac{s(s+1)(2s+1)}{6}$.
9. Quelle est la répartition des électrons dans le premier état excité $|\Phi_1\rangle$?
10. Calculer en fonction de *a, h, m, c* et *p* l'énergie mise en jeu lors de l'excitation de la transition $|\Phi_0\rangle$ -> $|\Phi_1\rangle$.
11. Evaluer les valeurs de *p* pour que l'adsorption soit dans le spectre visible (400-750 *nm*) c'est-à-dire que les ions apparaissent colorés. En déduire les longueurs L possibles pour ces chaînes polymères.

    Données : h = 6.62.10^{-34} *Js*, m = 9.10^{-31} *kg* et c = 3.10^{8} *m.s*$^{-1}$.