Exercice 1, MQ, 2007-2008, session 2.

1) $J = 10$ est donné. J est lié à la valeur propre de $(\vec{J})^2$ (pas demandé).

l'autre nombre quantique est m_J, valeur propre de $J_z/\hbar$.

m_J peut prendre toutes les valeurs entières entre $-J$ et $+J$

Acceptable aussi : $J_z |J, m_J\rangle = \hbar m_J |J, m_J\rangle$.

2) $M_z = \dfrac{-ge}{2m} J_z$.

valeurs possibles de M_z : $M_z = \dfrac{-ge\hbar}{2m} m_J$

soit $M_z = (-20\mu_B, -18\mu_B, \dots, 0, \dots 18\mu_B, 20\mu_B)$

Spin 1/2 plongé dans $\vec{B}_0 \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} B_0 \end{vmatrix}$

1) $H = -\vec{M}.\vec{B}_0 = -\gamma \vec{S}.\vec{B}_0$ $\quad \gamma$ rapport gyromagnétique

$= -\gamma (S_x B_x + S_y B_y + S_z B_z) = -\gamma \frac{B_0}{\sqrt{2}} (S_x + S_z) = \omega_0 (S_x + S_z)$

avec $\omega_0 = -\gamma \frac{B_0}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ avec $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) Valeurs propres et vecteurs propres

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\qquad (1-\lambda)(-1-\lambda)-1 = 0$

$-1-\cancel{\lambda}+\cancel{\lambda}+\lambda^2-1 = 0 \qquad \lambda^2 = 2$

soit $\lambda = \pm\sqrt{2}$

• $\lambda = +\sqrt{2}$ Vecteur d'état $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = \sqrt{2}x \\ x-y = \sqrt{2}y \end{matrix}$

$x = 1 \rightarrow y = \sqrt{2}-1$

• $\lambda = -\sqrt{2}$ Vecteur d'état $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = -\sqrt{2}x \\ x-y = -\sqrt{2}y \end{matrix}$

$x = 1 \rightarrow y = -\sqrt{2}-1$

2 vecteurs propres $\quad |\psi_+\rangle = C_+ \left(|+\rangle + (\sqrt{2}-1)|-\rangle\right)$

$|\psi_-\rangle = C_- \left(|+\rangle - (\sqrt{2}+1)|-\rangle\right)$

+ normalisation $\quad \langle\psi_+|\psi_+\rangle = 1 = |C_+|^2 \left(1+(\sqrt{2}-1)^2\right)$

$C_+ = \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$

$\langle\psi_-|\psi_-\rangle = 1 = |C_-|^2 \left(1+(\sqrt{2}+1)^2\right)$

$C_- = \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2}+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

Finalement $\quad |\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \left(|+\rangle + (\sqrt{2}-1)|-\rangle\right)$

$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \left(|+\rangle - (\sqrt{2}+1)|-\rangle\right)$

3) $|\psi(t=0)\rangle = |-\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_+\rangle + \beta|\psi_-\rangle$$

$\alpha=\sqrt{2}$

$$P\left(\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}\right) = \left|\langle\psi_+|-\rangle\right|^2 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4-2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \sim 0,146$$

2 mesures possibles

$$P\left(-\frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{2}}\right) = \left|\langle\psi_-|-\rangle\right|^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4+2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \sim 0,854$$

4) $$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} e^{-\frac{i\omega_0 t}{\sqrt{2}}}|\psi_+\rangle - \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} e^{\frac{i\omega_0 t}{\sqrt{2}}}|\psi_-\rangle$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)|+\rangle + \left(\cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\right)|-\rangle$$

Mesure de $\hat{S}_x$ ⇒ valeur moyenne

$$\langle \hat{S}_x \rangle_{\psi(t)} = \langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle$$

$$= \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\right) \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) \\ \cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right), \cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\right) \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{-i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\left(\cancel{\cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)} + \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\left(\cancel{\cos\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)} - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{-1}{2}\sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)\right) = -\frac{\hbar}{2}\sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}\right)$$

Ions colorés

1°) $H\varphi_n(x) = \varepsilon_n \varphi_n(x)$ avec $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$

En conjuguant on peut aussi écrire $H\varphi_n^*(x) = \varepsilon_n \varphi_n^*(x)$ $\varphi_n(x)$ et $\varphi_n^*(x)$ sont donc

solutions pour la même valeur de $\varepsilon_n \Rightarrow \varphi_n(x) + \varphi_n^*(x)$ est également solution. (φ_n réelle)

2°) Comme $U(x)$ est une fonction paire la probabilité de présence l'est aussi.

$\Rightarrow |\varphi_n(x)|^2 = \varphi_n^2(x)$ est paire $\Rightarrow \varphi_n(x) = \pm\varphi_n(-x)$ donc $\varphi_n(x)$ peut être

choisie paire ou impaire

3°) Pour $|x| > \frac{L}{2}$ $\varphi(x) = 0$. Pour $|x| < \frac{L}{2}$ $\varphi_n(x) = A\cos k_n x + B\sin k_n x$ $k_n = \sqrt{\frac{2m\varepsilon_n}{\hbar^2}}$

* Solutions paires $B = 0 \Rightarrow \varphi_n(x) = A\cos k_n x$ Comme $\varphi_n\left(\frac{L}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow k_n = (2m+1)\frac{\pi}{L} = n\frac{\pi}{L}$ n impair ($\neq 0$)

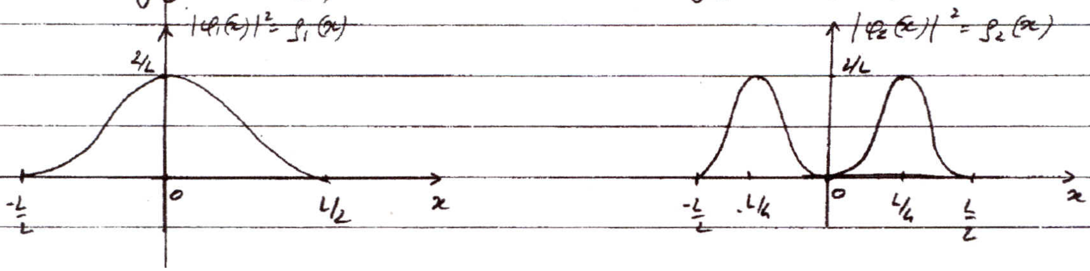
* Solutions impaires $A = 0$ $\varphi_n(x) = B\sin k_n x \Rightarrow k_n = 2m\frac{\pi}{L} = n\frac{\pi}{L}$ n pair ($\neq 0$)

4°) $\int_{-L/2}^{L/2} \varphi_n^2(x)\,dx = 1$ * $\int_{-L/2}^{L/2} |A|^2\cos^2(k_n x)\,dx = 1 = \int_{-L/2}^{L/2} |A|^2\left(\frac{1+\cos 2k_n x}{2}\right)dx$

$= |A|^2\frac{L}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ choisi réel

* De même $1 = |B|^2\frac{L}{2} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{L}}$

5°) $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ $(n=1)$ $\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$



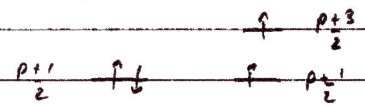
6:) Niveaux d'énergies $\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) = n^2\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right)$ avec $n = 1, 2, \ldots$

7:) On a $p+1$ électrons libres avec $p+1$ pair $\Rightarrow$ $\frac{p+1}{2}$ états occupés (2 électrons par niveau)

8:) Dans l'état fondamental : $E_0 = \sum_{n=1}^{(p+1)/2} (2\varepsilon_n) = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} \sum_{n=1}^{(p+1)/2} n^2$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} \cdot \frac{1}{24}(p+1)(p+2)(p+3)$$

9:) Un électron du niveau $n = \frac{p+1}{2}$ passe au niveau supérieur $n+1 = \frac{p+3}{2}$



10:) $\Delta E = E_1 - E_0 = \varepsilon_{\frac{p+3}{2}} - \varepsilon_{\frac{p+1}{2}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left[\left(\frac{p+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(p+2)$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m a^2 p^2}(p+2)$$

11:) $\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{8mc}{h} a^2 \frac{p^2}{p+2}$

Comme $400 < \lambda < 750$ avec p impair

$\Rightarrow 400 < 64 \cdot \frac{p^2}{(p+2)} < 750$ $\quad \frac{8mc}{h} a^2 \approx 64\ \text{nm}$

$\Rightarrow$ $p = 9$ $\lambda = 471\ \text{nm}$ $\quad p = 11$ $\lambda = 596\ \text{nm}$ $\quad p = 13$ $\lambda = 721\ \text{nm}$

Longueurs : $L_9 = 1{,}26\ \text{nm}$ $\quad L_{11} = 1{,}54\ \text{nm}$ $\quad L_{13} = 1{,}82\ \text{nm}$