## Solution

1) $[I_z] = (1/2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2) $[I_x] = (1/2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad [I_y] = (i/2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $[I_x^2] = (1/4)[E]$ $\quad$ ($[E]$ : matrice identité)

$$[I_x^3] = (1/4)[I_x]\ ;\ [I_x^4] = (1/16)[E]\ ;\ [I_x^5] = (1/16)[I_x]\ldots$$

d'où $\widehat{I}_x^{2k+1} = (1/2)^{2k}\widehat{I}_x$ et $\widehat{I}_x^{2k} = (1/2)^{2k}\widehat{E}$.

Comme $[I_y^2] = [I_z^2] = (1/4)[E]$, $\widehat{I}^2 = (3/4)\widehat{E}$ (valeurs propres de $\widehat{I}^2$ : 3/4).

4) $$\widehat{R} = \widehat{E}\left[1 - \frac{\theta^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\theta^4}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots\right] + i\widehat{I}_x\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\theta^5}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots\right]$$

d'où $\widehat{R} = \cos(\theta/2)\widehat{E} + 2i\sin(\theta/2)\widehat{I}_x$

5) a) $[e^{i\theta I_x}] = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ (du fait des valeurs propres de $\widehat{I}_x$ : 1/2 et −1/2).

b) Matrice des vecteurs propres $S = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d'où $[e^{i\theta I_x}]$ dans la base $(|\alpha\rangle, |\beta\rangle)$ :

$$[e^{i\theta I_x}] = (1/2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

d'où : $e^{i\theta\widehat{x}} = \cos(\theta/2)\widehat{E} + 2i\sin(\theta/2)\widehat{I}_x$.

6) La première relation est évidente (tous les opérateurs commutent). La deuxième et la troisième relation se traitent de façon similaire.

Deuxième relation :

$$\left(\cos(\theta/2)\widehat{E} - 2i\sin(\theta/2)\widehat{I}_x\right)\widehat{I}_y\left(\cos(\theta/2)\widehat{E} + 2i\sin(\theta/2)\widehat{I}_x\right)$$
$$= \cos^2(\theta/2)\widehat{I}_y + 4\sin^2(\theta/2)\widehat{I}_x\widehat{I}_y\widehat{I}_x - 2i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\widehat{I}_x\widehat{I}_y + 2i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\widehat{I}_y\widehat{I}_x$$
$$= \cos\theta\widehat{I}_y + \sin\theta\widehat{I}_z$$

MECANIQUE QUANTIQUE (Sept. 2007)

1°) Deux configurations  et  avec $E_0 = \langle 1|H|1\rangle$
et $E_0 = \langle 2|H|2\rangle$

Couplage $V = \langle 2|H|1\rangle$ avec $V$ réel $\Rightarrow \langle 2|H|1\rangle = \langle 1|H|2\rangle = V$

2°) $H = \begin{pmatrix} E_0 & V \\ V & E_0 \end{pmatrix}$

3°) Valeurs propres de $H$ $\quad H|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad \Rightarrow E_\pm = E_0 \pm V$

Si l'on prend $|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$, on obtient $(E_0 - E_+)a + Vb = 0$

$\Rightarrow a = b \quad \Rightarrow |\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \quad (\langle\psi_+|\psi_+\rangle = 1)$

De même $\quad |\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$

$$\Rightarrow \begin{cases} |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle) \end{cases}$$

4°) $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ $\quad$ L'équ. de Schrödinger $\quad H|\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle$

$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle e^{-iE_+t/\hbar} + |-\rangle e^{-iE_-t/\hbar}\right)$

$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_0t/\hbar}\left(|+\rangle e^{-iVt/\hbar} + |-\rangle e^{+iVt/\hbar}\right)$

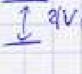
$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-iE_0t/\hbar}\left((|1\rangle + |2\rangle) e^{-iVt/\hbar} + (|1\rangle - |2\rangle) e^{iVt/\hbar}\right)$

$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-iE_0t/\hbar}\left(\cos\left(\frac{Vt}{\hbar}\right)|1\rangle + i\sin\left(\frac{Vt}{\hbar}\right)|2\rangle\right)$

5°) Les probabilités s'écrivent $P_1 = |c_1|^2 = \cos^2\left(\frac{Vt}{\hbar}\right)$ $\quad P_2 = |c_2|^2 = \sin^2\left(\frac{Vt}{\hbar}\right)$

fonction périodiques de $t$ (et $P_1 + P_2 = 1$)

Période du $\cos^2$ : $T = \frac{h}{2V} \Rightarrow \nu_{osc} = \frac{2V}{h}$


6°) $\lambda = 165\ nm \qquad \Delta E = E_+ - E_- = 2|V|$ $\quad E_0$  $2|V|$

$\Rightarrow \quad A.N. : |V| = \frac{hc}{2\lambda} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-18}}{2}\ J = 3{,}76\ eV$

7°) Etat fondamental $\rightarrow$ état "liant" $|+\rangle \Rightarrow V < 0$

8°) $H = \dfrac{L_z^2}{2 m_e r_0^2}$ Terme purement cinétique dans le rotateur

$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ avec $I = m_e r_0^2$ moment d'inertie

$\Rightarrow E_k = \dfrac{1}{2} \dfrac{L_z^2}{I}$ car $L_z = m r_0^2 \omega$

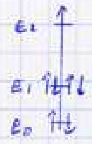
$\Rightarrow E_k = \dfrac{L_z^2}{2 m r_0^2}$

9°) On sait que $L_z |m_l\rangle = m_l \hbar |m_l\rangle$ avec $|m_l\rangle$ états propres de $L_z$ et $m_l$ entier

$\Rightarrow E_{m_l} = \dfrac{m_l^2 \hbar^2}{2 m_e r_0^2}$ $m_l = 0$ état $|0\rangle$ non dégénéré

$E_{m_l} = m_l^2 E_1$ états doublement dégénérés

10°)




Etat fondamental


1er état excité

avec $E_0 = 0$

$E_1 = \dfrac{\hbar^2}{2 m_e r_0^2}$

$E_2 = 4 E_1$

11°) Energie de transition $\Delta E = E_2 - E_1 = \dfrac{3\hbar^2}{2 m_e r_0^2}$

$\Rightarrow$ A.N. : $\Delta E = 1{,}03.10^{-18}\ J = 6{,}4\ eV$

Energie comparable en ordre de grandeur au 3°)

malgré un modèle simpliste