UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III

L3 LICENCE PHYSIQUE CHIMIE APPLICATION 2005 / 2006
Mention physique fondamentale

Examen de Mécanique Quantique du 12 septembre 2006

Module 2L5PY11

Durée : 3h - Tous documents interdits. La question de cours et les deux exercices sont totalement indépendants.

Questions de cours : une expérience simple de mesure de la polarisation d'un photon

Un photon se propage dans la direction *Oz*, et traverse successivement un polariseur *P* et un analyseur *A*. θ est l'angle entre *Ox* et le champ électrique du photon transmis par *P*. Les vibrations transmises par A sont parallèles à *Ox*.

1. Quels sont les résultats possibles de la mesure effectuée par l'analyseur *A* ?
2. Quels sont les états propres de polarisation du photon associés aux possibles résultats de la mesure effectuée par l'analyseur *A* ?
3. Ecrire l'état de polarisation du photon transmis par le polariseur *P* en fonction de θ dans la représentation des états propres de la mesure effectuée par *A*.
   Vérifier que l'état soit normé.
4. Quelle est la probabilité associée à chacun des possibles résultats de la mesure effectuée par l'analyseur *A* ?
5. Est-il possible par une mesure effectuée par l'analyseur *A* de connaître l'état de polarisation du photon avant le polariseur *P* ? Justifier brièvement votre réponse.

Orbitales atomiques

1. Donner la forme générale des fonctions d'onde des états stationnaires de l'atome d'hydrogène $\varphi_{n,l,m}(\vec{r})$ (orbitales atomiques). Que représentent les nombres quantiques *n, l* et *m* ? Donner les valeurs propres associées à ces grandeurs physiques.
2. Définir les densités de probabilité radiale et angulaire de ces états. Que représentent ces fonctions ?
3. Montrer par un calcul complet que les harmoniques sphériques correspondant aux orbitales $\varphi_{n,1,m}(\vec{r})$ sont normées. Quelle est la raison physique de cette normalisation.

   On donne :

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_1^{\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta . e^{\pm i\varphi} \text{ et } Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta .$$

4. On forme les trois superpositions linéaires suivantes :

$$\varphi_{n,1,0}(\vec{r}), -\varphi_{n,1,1}(\vec{r}) + \varphi_{n,1,-1}(\vec{r}) \text{ et } \varphi_{n,1,1}(\vec{r}) + \varphi_{n,1,-1}(\vec{r}) .$$

   Normer, si besoin, ces fonctions d'ondes et montrer qu'elles sont orthogonales entre elles.
5. En utilisant les relations entre les paramètres du repère sphérique, montrer que ces trois nouvelles fonctions peuvent se mettre sous la forme :

$$\varphi_{nx}(\vec{r}) = f(r).\frac{x}{r}, \ \varphi_{ny}(\vec{r}) = f(r).\frac{y}{r} \text{ et } \varphi_{nz}(\vec{r}) = f(r).\frac{z}{r}.$$

6. Donner la forme générale de l'orbitale $\varphi_{nz}(\vec{r})$ (on pourra pour cela fixer r et regarder l'évolution du module de la fonction d'onde dans le repère sphérique). Justifier l'appellation orbitale p_z. En déduire la forme des deux autres orbitales.
7. On se propose maintenant d'étudier la fonction d'onde suivante :

$$\varphi(\vec{r}) = \lambda.\varphi_{nx}(\vec{r}) + \mu.\varphi_{ny}(\vec{r}) + \nu.\varphi_{nz}(\vec{r}).$$

Montrer que cette fonction d'onde est normée pourvu que les coefficients λ, μ et ν vérifient une relation que l'on donnera. Que représentent ces coefficients ? En déduire que $\varphi(\vec{r})$ peut se mettre sous la forme $f(r).\frac{u}{r}$. Que représente alors u ?

Système à deux niveaux

On désigne par $|0\rangle$ et $|1\rangle$ les états propres de l'Hamiltonien H_0 d'un système à deux niveaux. Les énergies propres sont $E_0 = 0$ et $E_1 = \hbar\omega_0 > 0$. Soumis à l'action d'un champ, l'Hamiltonien devient $H = H_0 + V$, où V est un opérateur caractérisant l'interaction entre le système et le champ.

1. Ecrire la matrice de H dans la base ($|0\rangle, |1\rangle$). Que devient-elle si l'on suppose $\langle 0|V|0\rangle = \langle 1|V|1\rangle = 0$ et $\langle 0|V|1\rangle = \langle 1|V|0\rangle^* = V_0 e^{i\omega t}$, avec V_0 et ω deux réels positifs ?
2. On pose $|\psi(t)\rangle = a(t)|0\rangle + b(t)|1\rangle$. Ecrire -à partir de l'équation de Schrödinger- les équations d'évolution de a et b.
3. On pose $b = b' e^{-i\omega t}$. Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait b'.
4. On pose $\rho_{ab'} = ab'^*$ et $n_b = |b'|^2 = b'b'^*$.
   a. Déterminer les équations d'évolution de $\rho_{ab'}$ et n_b (calculer les dérivées).
   b. On pose $n_a = |a|^2$. Justifier sans calculs que $n_a = 1 - n_b$.
5. On appelle vecteur de Bloch, le vecteur $\vec{B} = \left(2\,\mathrm{Re}(\rho_{ab'}), 2\,\mathrm{Im}(\rho_{ab'}), n_b - n_a\right)$. A partir des résultats de la question 4., montrer que $\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\gamma} \times \vec{B}$, relation vectorielle dans laquelle $\times$ désigne le produit vectoriel et $\vec{\gamma}$ est un vecteur dont on déterminera les composantes. Conclure sur le mouvement de $\vec{B}$.

Formulaire mathématique

On rappelle la relation trigonométrique :

$$\sin p \cos q = \frac{1}{2}(\sin(p-q)\sin(p+q)) \text{ et } \cos^2 p = \frac{1}{2}(1+\cos 2p)$$