Question de cours : Une expérience simple de mesure de la polarisation d'un photon (6 points)

Un photon se propage dans la direction *Oz*, et traverse successivement un polariseur *P* et un analyseur *A* ; θ est l'angle entre *Ox* et le champ électrique du photon transmis par *P* ; les vibrations transmises par A sont parallèles à *Ox*.

1) Quels sont les résultats possibles de la mesure effectuée par l'analyseur *A* ?

(1 point)
Il y a deux résultats possibles : 0. le photon est arrêté ; 1. le photon passe.

2) Quels sont les états propres de polarisation du photon associés aux possibles résultats de la mesure effectuée par l'analyseur *A* ?

(1 point)
Résultat 0 => polarisation le long Oy $|0\rangle$*; Résultat 1 => polarisation le long Ox* $|1\rangle$.

3) Ecrire l'état de polarisation du photon transmis par le polariseur P en fonction de θ dans la représentation des états propres de la mesure effectuée par l'analyseur *A*. Vérifier que l'état soit normé.

(1 point)
$|p\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ *avec* $a = \sin\theta$ et $b = \cos\theta$. *On vérifie que* $a^2 + b^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

4) Quelle est la probabilité associée à chacun des possibles résultats de la mesure effectuée par l'analyseur *A* ?

(1 point)
Résultat 0, probabilité $a^2 = \sin^2\theta$; *Résultat 1, probabilité* $b^2 = \cos^2\theta$

5) Est-il possible par une mesure effectuée par l'analyseur *A* de connaître l'état de polarisation du photon avant le polariseur *P* ? Justifier brièvement votre réponse.

(1 point) réponse : non.

(1 point) Le polariseur P projette l'état du photon incident sur l'état $|p\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, *toute information sur l'état du photon avant le polariseur P est perdue.*

Orbitales atomiques :

1:) $\varphi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\theta,\varphi)$ avec n nbre quantique, repère l'énergie

l repère le moment cinétique et m sa projection sur Oz — $l = 0, \dots, n-1$; $-l < m < +l$

Valeurs propres associées : $E_n = -\frac{E_I}{n^2}$ avec $E_I = 13{,}6\,eV$

Mesure de L^2 : $l(l+1)\hbar^2$

Mesure de L_z : $m\hbar$

2:) Densité de probabilité radiale $\rightarrow$ probabilité de trouver l'électron entre 2 sphères de rayon r et $r+dr$ $\quad dP_r = \rho(r)\,dr = \iint r^2 |\varphi_{nlm}(\vec{r})|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

$$\Rightarrow \rho(r) = r^2 \iint |R_{nl}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= r^2 |R_{nl}(r)|^2$$

Densité de probabilité angulaire $\rightarrow$ idem mais pour l'angle solide

$$\rho(\Omega) = |Y_l^m(\theta,\varphi)|^2$$

3:) $\varphi_{n1m}(\vec{r}) = R_{n1}(r)\, Y_1^m(\theta,\varphi) \qquad m = -1, 0, 1$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 1$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{3}{4\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{3}{4\pi} \times 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \sin\theta\, d\theta = \frac{3}{2} \left[\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{2}\, d\theta + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2} \sin\theta\, d\theta \right]$$

$$= \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} [\cos\theta]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(-\theta) + \sin 3\theta)\, d\theta \right] = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right] = 1$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{2}\right) \sin\theta\, d\theta = \frac{3}{4} \left[\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{2}\, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2\theta \sin\theta\, d\theta \right]$$

$$= \frac{3}{4} \left[1 - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (\sin(-\theta) + \sin 3\theta)\, d\theta \right] = \frac{3}{4} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right] = 1$$

Idem pour Y_1^{-1}

$Y_l^m(\theta,\varphi)$ normé $\Rightarrow$ probabilité $= 1$ de trouver l'électron dans tout l'angle solide (4π)

4°) $\varphi_{n10}(r) = R_{n1}(r) \cdot Y_1^0(\theta,\varphi) = R_{n1}(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ qui par définition est normée

c.à.d $\iiint |\varphi_{n10}(r)|^2\, r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 1$

$-\varphi_{n11}(r) + \varphi_{n1\bar{1}}(r) = -R_{n1}(r)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\; 2\cos\varphi$

De plus $|\varphi_{n11}(r) + \varphi_{n1\bar{1}}(r)|^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n1\bar{1}} - \varphi_{n11})$ normée

De même $\varphi_{n11}(r) + \varphi_{n1\bar{1}}(r) = -R_{n1}(r)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\; 2\sin\varphi\; i$

Idem pour $|\quad|^2 = 2 \Rightarrow +\frac{i}{\sqrt{2}}\left[\varphi_{n11}(r) + \varphi_{n1\bar{1}}(r)\right] = 1$ en norme

De plus à cause des propriétés des Y_ℓ^m $\quad Y_\ell^m\, Y_{\ell'}^{m'} = \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$

ces fonctions sont orthogonales 2 à 2.

5°) $\varphi_{n10}(\vec{r}) = R_{n1}(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ or dans le repère sphérique $\cos\theta = z/r$

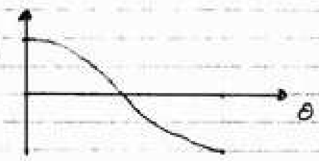
$\Rightarrow \varphi_{n10}(\vec{r}) = R_{n1}(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\; z/r = \varphi_{nz}(\vec{r})$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n1\bar{1}} - \varphi_{n11}) = R_{n1}(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\cos\varphi$ or $\sin\theta\cos\varphi = x/r$

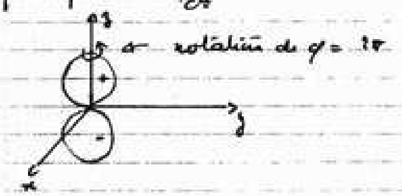
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n1\bar{1}} - \varphi_{n11}) = R_{n1}(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\;\frac{x}{r} = \varphi_{nx}(\vec{r})$

$\frac{i}{\sqrt{2}}(\varphi_{n1\bar{1}} + \varphi_{n11}) = R_{n1}(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot y/r$ puisque $\sin\theta\sin\varphi = y/r$

6°) Si on fixe r $\quad R_{n1}(r) = $ cte $\Rightarrow |\varphi_{nz}(r)| = $ cte $\cdot|\cos\theta| = $ cte $\cdot\, z/$cte



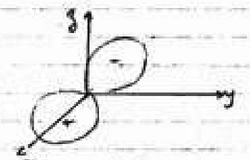
donne $\Rightarrow$ dans R_S



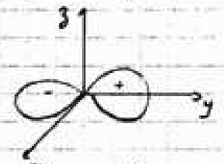
Cela donne 2 cercles $\Rightarrow$ 2 sphères symétriques / à xOy $\rightarrow$ orbitales p_z

+ et - car f° d'onde réelle $\Rightarrow$ signe de $\cos\theta$

Les 2 autres orbitales donnent la m̂ chose en x et en y $\Rightarrow$ orbitales p_x et p_y



p_x



p_y

4) $\varphi(\vec{r}) = \lambda\, \varphi_{nx}(\vec{r}) + \mu\, \varphi_{ny}(\vec{r}) + \nu\, \varphi_{nz}(\vec{r})$

$\langle \varphi(\vec{r}) | \varphi(\vec{r}) \rangle = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ puisque les orbitales p_x, p_y et p_z sont orthonormées

$\Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ relation identique à celle des cosinus directeurs

$\lambda = \cos\alpha \quad \mu = \cos\beta \quad \nu = \cos\gamma$

On obtient donc $\varphi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\; R_{n1}(\vec{r}) \left(\lambda \frac{x}{r} + \mu \frac{y}{r} + \nu\, z/r \right)$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\; R_{n1}(r) \left(\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{r} \right) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\; R_{n1}(r)\; \frac{u}{r}$$

avec u la direction définie à partir des cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$

on a donc défini une orbitale dans la direction $u \rightarrow p_u$.