UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III

L3 LICENCE PHYSIQUE CHIMIE APPLICATION 2004 / 2005
Mention physique fondamentale

Examen de Mécanique Quantique du 06 septembre 2005

Module 2L5PY11
Durée : 3h - Tous documents interdits

Système à deux niveaux (1h30)

On considère un système à deux niveaux. Les états de l'Hamiltonien H_0 sont notés $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ et les énergies correspondantes E_1 et E_2 ($\boldsymbol{E_2 > E_1}$).

1. Donner les relations que vérifient H_0, E_1, E_2, $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$.

   Sous l'action d'une perturbation extérieure, l'Hamiltonien devient $H = H_0 + W$, avec dans la base ($|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$):
   $$W = \begin{pmatrix} 0 & W_{12} \\ W_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Ecrire l'Hamiltonien H dans cette base. On se place dans le cas $W_{21} = W_{12}$, montrer que W_{12} est réel. A quelle condition $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ sont états propres de H ?

3. On se propose de déterminer ces états propres de H dans le cas général. On supposera que W_{12} est positif.

   a. Déterminer les valeurs propres E_+ et E_- de H.

   b. Déterminer les états propres normés $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ correspondants. On introduira θ défini par $\tan\theta = \dfrac{W_{12}}{\Delta}$ avec $\Delta = E_2 - E_1$.

   c. Dessiner l'allure de la courbe de E_+ et E_- avec Δ pour une valeur quelconque de W_{12} ainsi que pour $W_{12} = 0$. Dans quel cas l'effet de la perturbation est le plus important ?

   d. Donner les expressions de $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ dans les cas limites d'une forte perturbation et d'une faible perturbation (par rapport à l'écart d'énergie Δ). Interpréter.

4. La perturbation est supposée être appliquée à partir de l'instant $t = 0$ uniquement. On se place dans le cas limite où $W_{12} >> \Delta$ et on prendra les expressions approchées de $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ déterminées en 3d). Pour t $\leq$ 0 le système est dans l'état $|\varphi_1\rangle$.

   a. Déterminer l'état du système à l'instant $t > 0$.

   b. On mesure l'Hamiltonien non perturbé H_0. Quelles sont les valeurs possibles ? les probabilités de mesure ? l'état du système après la mesure ?

   c. A quel instant le système est à coup sûr dans l'état $|\varphi_2\rangle$ après la mesure de H_0?

Oscillateur harmonique (1h30)

On considère l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension $H = \dfrac{Px^2}{2m} + \dfrac{1}{2}kx^2$ et les états propres associés $|n\rangle$ supposés normés.

On introduit également les opérateurs X et P définis par : $X = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}\, x$ et $P = \sqrt{\dfrac{1}{m\omega\hbar}}\, P_x$, ainsi que les deux opérateurs de création et d'annihilation $a = \dfrac{X + iP}{\sqrt{2}}$ et $a^+ = \dfrac{X - iP}{\sqrt{2}}$.

1. Quelle est la relation entre *k, m* et ω?

2. En utilisant les définitions des deux opérateurs *a* et a^+, calculer $\left[a, a^+\right]$. En utilisant les relations de récurrence $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ et $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, déterminer la nouvelle expression de *H* en fonction de ces deux opérateurs. En déduire les valeurs propres associées.

3. Montrer que l'état $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}} |n\rangle$ est un état propre de l'opérateur *a* défini plus haut. Quelle est la valeur propre associée ?

4. A l'instant *t = 0*, l'oscillateur est dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle$. Déterminer le développement de $|\psi(t)\rangle$ sur la base des vecteurs $|n\rangle$. Nous noterons pour cela E_n l'énergie des états stationnaires de l'oscillateur.

5. Durant un intervalle de temps $[0, \tau]$ très bref $\tau << 1$, l'oscillateur est soumis à un potentiel supplémentaire $V = \hbar u N^2$ avec $u >> \omega$ et $N = a^+ a$. L'intensité de *V* est telle que l'Hamiltonien du système perturbé devient peu différent de *V* durant l'intervalle $[0, \tau]$ (soit $H+V \approx V$). Montrer que les états $|n\rangle$ sont alors états propres de la perturbation *V*.

6. Donner les valeurs propres du système. En déduire le développement de $|\psi(t)\rangle$ pour $t = \tau$ sur la base des états $|n\rangle$ lorsque $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle$.

7. Donner l'expression de l'opérateur *x* en fonction de *a* et a^+. Calculer $\langle x \rangle$ sur l'état $|\alpha\rangle$.

8. Donner l'expression de l'opérateur P_x en fonction de *a* et a^+. Calculer $\langle P_x \rangle$ sur l'état $|\alpha\rangle$.

9. On considère que α est imaginaire pur ($\alpha = i\gamma$ avec $\gamma > 0$). Utiliser alors les résultats de 7) et 8) pour calculer $\langle x \rangle$ et $\langle P_x \rangle$ pour les états $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$. Si la fonction d'onde est donnée par l'expression $|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\theta}|\alpha\rangle + e^{i\theta}|-\alpha\rangle)$, quelle est alors la particularité de l'état $|\psi(\tau)\rangle$?