OSCILLATEUR 1D

$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2$ avec $X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$ et $P = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\, P_x$

1°) Oscillateur harmonique → équivalent classique $\vec F = -k\vec x$

RFD ⇒ $\sum \vec F = -k\vec x = -m \frac{d^2x}{dt^2}\vec e_x$ ⇒ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ fréquence propre

⇒ $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$

2°) On a donc $H = \frac{m\hbar\omega}{2m} P^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} X^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(P^2 + X^2\right)$

On a aussi $X = \frac{a+a^+}{\sqrt{2}}$ et $P = -i\left(\frac{a-a^+}{\sqrt{2}}\right)$

$$[a, a^+] = \frac{1}{2}[X+iP, X-iP] = \frac{1}{2}\left((X+iP)(X-iP) - (X-iP)(X+iP)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2i(PX-XP)\right) = i[P,X] = \frac{i}{\hbar}\underbrace{[P_x, x]}_{-i\hbar} = 1$$

On peut par exemple calculer a^+a.

$$a^+a = \frac{1}{2}(X-iP)(X+iP) = \frac{1}{2}(XX + iXP - iPX + PP)$$

$$= \frac{1}{2}\left(X^2+P^2 - i[P,X]\right) = \frac{1}{2}\left(X^2+P^2-1\right)$$

On déduit de ces deux résultats : $X^2+P^2 = 2a^+a+1 = 2aa^+-1$

H s'écrit alors $H = \hbar\omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(aa^+-\frac{1}{2}\right)$

soit $H|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)|n\rangle$

3°) $a|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}\, a|n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}\sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$= \alpha\, e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{n-1}}|n-1\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ $|\alpha\rangle$ état propre de a.

La valeur propre est donc α.

4°) $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle$. Pour des états stationnaires $|\psi(t)\rangle = e^{-iE_n t/\hbar}|n\rangle$

Puisque $|\psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle$ ⇒ $|\psi(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}} e^{-iE_n t/\hbar}|n\rangle$

5°) On a déjà démontré que $H = \hbar\omega(a^+a+1/2) = \hbar\omega(N+1/2)$

Pour la perturbation, $V|n\rangle = \hbar u N^2|n\rangle = \hbar u\, n^2|n\rangle$ ⇒ état propre de V

Valeur propre $\hbar u\, n^2$

6°) Les valeurs propres étant $\hbar u\, n^2$; on a $|\psi(\tau)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}} e^{-iun^2\tau}|n\rangle$

7°) D'après la définition $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, X = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, \frac{a+a^+}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^+)$

De même $P_x = \sqrt{m\hbar\omega}\, P = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\, i\,(a^+ - a)$

$\Rightarrow \langle x \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\alpha + \alpha^*) \qquad \left(= \langle \alpha | \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^+) | \alpha \rangle\right)$

8°) De même $\langle P_x \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\, i\,(\alpha^* - \alpha)$

9°) Lorsque $\alpha = i\gamma$ ① $\langle x \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(i\gamma - i\gamma) = 0$

$\langle x \rangle_{-\alpha} = 0$

$\Big\}$ la position moyenne de la particule est nulle dans l'état $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$

② $\langle P_x \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\, i\,(-i\gamma - i\gamma) = \gamma\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} > 0$

$\langle P_x \rangle_{-\alpha} = -\gamma\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} < 0$

L'état $|\psi(t)\rangle$ est donc la superposition quantique de 2 états dont la valeur moyenne de la position est la même dans les 2 états mais avec une vitesse positive dans $|\alpha\rangle$ et négative dans $|-\alpha\rangle$.