UNIVERSITÉ PAUL SABATIER	LICENCE STS

Année universitaire 2010–2011

L3 Physique fondamentale : MÉCANIQUE QUANTIQUE

CONTRÔLE TERMINAL SESSION 1

durée 2 heures

A. Question de cours : Opérateur impulsion sur un intervalle de $\mathbb{R}$

On considère un système quantique dont l'espace des états est donné par les fonctions d'ondes normalisables sur un intervalle I (éventuellement infini) de $\mathbb{R}$. On utilise les notations de Dirac, et l'on rappelle que l'on a :

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) \quad \forall x \in I$$

On définit comme d'habitude l'opérateur $\hat{x}$ comme l'opérateur de multiplication par x, et l'opérateur $\hat{p}$ comme l'opérateur de dérivation. Autrement dit, on a :

$$\langle x|\hat{x}|\psi\rangle = x\psi(x)$$
$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}$$

A.1. Montrer que l'opérateur $\hat{x}$ est hermitien quel que soit l'intervalle I de définition des fonctions d'onde.

A.2. Donner sans démonstration le spectre de $\hat{x}$.

A.3. On prend l'intervalle $I = [0, +\infty[$. Donner les conditions à imposer aux fonctions d'onde $\psi(x)$ pour que l'opérateur $\hat{p}$ soit hermitien.

A.4. Même question avec un intervalle $I = [a, b]$. Il peut y avoir plusieurs possibilités.

B. Problème : états cohérents de l'oscillateur harmonique et « chat de Schrödinger »

Dans ce problème, il n'y pas de notation spéciale pour les opérateurs. Toutes les observables sont supposées quantiques. Soit un oscillateur harmonique à une dimension, donné par le hamiltonien $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$, avec la relation de commutation usuelle $[x, p] = i\hbar$.

B.1. On fait le changement de variables $p = \sqrt{\hbar m\omega}P$ et $x = \sqrt{\hbar/m\omega}X$. Donner le hamiltonien avec ces nouvelles variables, et la relation de commutation entre P et X.

B.2. Définir les opérateurs a et $a^\dagger$. Rappeler sans démonstration la relation de commutation entre ces deux opérateurs, et la forme du nouvel hamiltonien en fonction de ces opérateurs. On note de manière standard les vecteurs propres de H par $|n\rangle$. À quelle valeur propre de H correspond le ket $|n\rangle$? Quelle sont les actions de a et $a^\dagger$ sur $|n\rangle$.

B.3. Les états cohérents sont définis comme des vecteurs propres de a : $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. On écrit $|\alpha\rangle = \sum c_n|n\rangle$. Écrire l'équation pour les coefficients c_n. En déduire une relation de récurence entre ces coefficients.

B.4. Vérifier que $c_n = \exp(-|\alpha|^2)\alpha^n/\sqrt{n!}$ satisfait à la relation de récurrence, et montrer que l'état $|\alpha\rangle$ ainsi défini est normé.

B.5. On s'intéresse à l'évolution temporelle d'un état qui est égal à $|\alpha\rangle$ pour $t = 0$. Montrer en travaillant dans la base $|n\rangle$, que l'état à t quelconque est donné par $\exp(-i\omega t/2)|\alpha \exp(-i\omega t)\rangle$. On pourra commencer par écrire l'évolution temporelle de $|n\rangle$.

B.6. Calculer les valeurs moyennes $\langle X\rangle$ et $\langle P\rangle$ de la position et de l'impulsion dans un état cohérent $|\alpha\rangle$. Calculer ensuite les valeurs moyennes des carrés $\langle X^2\rangle$ et $\langle P^2\rangle$. Aide : on rappelle que $\langle\psi|A|\varphi\rangle = \langle\varphi|A^\dagger|\psi\rangle^*$.

B.7. Montrer que le paquet d'onde d'un état $|\alpha\rangle$ est le plus petit possible autorisé par la mécanique quantique. C'est pourquoi on appelle aussi ces états cohérents « quasi-classiques ».

B.8. On ajoute un terme $V = E(a^\dagger a)^2$ au hamiltonien H pendant un temps T_1 relativement court. On suppose que E est suffisamment élevé pour que l'on puisse négliger l'action de H pendant le temps T_1. On suppose que l'état est un état cohérent $|\alpha\rangle$ avant l'application de V, et on choisit $T_1 E = \pi\hbar/2$. Écrire l'état du sytème à la fin de la perturbation (on donnera les coefficients dans la base $|n\rangle$).

B.9. Montrer que l'état ainsi obtenu est de la forme : $a_1|\alpha_1\rangle + a_2|\alpha_2\rangle$ où $|\alpha_1\rangle$ et $|\alpha_2\rangle$ sont deux états cohérents. On précisera les valeurs de a_1, a_2, α_1 et α_2. *Un tel état, superposition linéaire de deux états « classiques » est appelé chat de Schrödinger, en hommage à la célèbre expérience de pensée imaginée par ce physicien.*