UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III

INDIQUER
LA NATURE DE
L'EXAMEN OU
DU CONCOURS

N° CARTE D'ÉTUDIANT

SESSION :

NOM du candidat : LABASTIE

Prénoms : Prof.

Date de naissance : 19

NOTE SUR 20

Je soussigné, déclare ne m'être pas inscrit dans une autre Université pour subir le même examen pendant la présente session.
Signature

COMPOSITION

Le candidat devra signer lisiblement son nom à la fin de la composition.

Epreuve de

A.1 $\langle \varphi | X | \psi \rangle = \int_a^b \varphi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx$

1 $= \left[\int_a^b \psi^*(x)\, x\, \varphi(x) \right]^* = \langle \psi | X | \varphi \rangle^*$

$X = X^+$ 0,5 donc $X = X^+$ quels que soient
$\forall a, b.$ 0,5 a et b finis ou infinis.

1 A.2. Le spectre de $\hat{x}$ est l'intervalle I.

A.3 On veut $\langle \varphi | \hat{p} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{p} | \varphi \rangle^*$
Or $\langle \varphi | \hat{p} | \psi \rangle = \frac{\hbar}{i} \int_0^\infty \varphi^* \frac{d\psi}{dx}\, dx$

0,5 $= \frac{\hbar}{i} \left[\varphi^* \psi \right]_0^\infty - \frac{\hbar}{i} \int_0^\infty \psi \frac{d\varphi^*}{dx}\, dx.$

et $\langle \psi | \hat{p} | \varphi \rangle^* = -\frac{\hbar}{i} \int_0^\infty \psi \frac{d\varphi^*}{dx}\, dx.$

il faut donc $\frac{\hbar}{i} \left[\varphi^* \psi \right]_0^\infty = 0$

0,5 soit $\varphi^*(0)\, \psi(0) = 0$, car les fonctions tendent vers 0
On choisit donc des fonctions $\psi(x)$ à l'∞.
0,5 telles que $\psi(0) = 0$.

A.4. Le même calcul donne $\varphi^*(a)\, \psi(a)$
0,5 $= \varphi^*(b)\, \psi(b)$.

1 sur 3 0,5 — On peut choisir $\Psi(a) = \Psi(b) = 0$

2 ou 3 sur 3 : 1 — mais aussi $\Psi(a) = \Psi(b)$ périodique

et même $\Psi(b) = e^{i\alpha}\,\Psi(a)$ Bloch

(dans chaque cas, le spectre de p sera $\neq^t$).

0,5 B.1. $$H = \frac{\hbar m\omega}{2m} P^2 + \frac{\hbar}{2m\omega}\omega^2 X^2 = \hbar\omega\left(\frac{P^2+X^2}{2}\right)$$

0,5 $$[X, P] = i$$

0,5+0,5 B.2. $$a = \frac{X+iP}{\sqrt{2}} \qquad a^+ = \frac{X-iP}{\sqrt{2}}$$

0,5 $$[a, a^+] = 1$$

0,5 on a $H|n\rangle = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})|n\rangle$

0,5 $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

0,5 $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

1 B.3 On a $\sum_n \sqrt{n}\, c_n |n-1\rangle = \alpha \sum_n c_n |n\rangle$

0,5 soit $c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha c_n$.

$$c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} c_n$$

0,5 B.4. $$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}\,\frac{\sqrt{n!}}{\alpha^n} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}.$$

0,5 $$\langle\alpha|\alpha\rangle = \exp -|\alpha|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1.$$

0,5 utilise $\langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_n |c_n|^2$.

1 B.5. On sait que $|n(t)\rangle = e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}|n\rangle$

0,5 donc $$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n e^{-in\omega t}}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}}\,|e^{-i\omega t}\alpha\rangle$$

B.6. $\cancel{\text{B.2.6}}$ $$X|\alpha\rangle = \frac{a+a^+}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle + a^+|\alpha\rangle.$$

0,5 $$\langle\alpha|X|\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\langle\alpha|\alpha\rangle + \langle\alpha|a^+|\alpha\rangle$$

~~1,5 total. Et idée + calcul~~

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \langle\alpha|a|\alpha\rangle^*$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\alpha.$$

0,5 même calcul $\langle\alpha|P|\alpha\rangle = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\alpha.$

$$X^2 = \frac{a^{+2} + a^2 + aa^+ + a^+a}{2}$$

$$\langle X^2\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle\alpha|a^{+2}|\alpha\rangle + \langle\alpha|a^2|\alpha\rangle + 2\langle\alpha|a^+a|\alpha\rangle + 1.\right)$$

0,5 $$= \frac{1}{2}\left(\alpha^{*2} + \alpha^2 + 2|\alpha|^2\right) + \frac{1}{2}.$$

$$= 2\,(\mathrm{Re}\,\alpha)^2 + \frac{1}{2}.$$

En partant de $P^2 = \dfrac{aa^+ + a^+a - a^2 - a^{+2}}{2}$ on trouve.

0,5 $$\langle P^2\rangle = 2\,(\mathrm{Im}\,\alpha)^2 + \frac{1}{2}.$$

B.7. idée de calculer ΔX ΔP : 0,5

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

calcul 0,5

$$\Delta P = \sqrt{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Delta X\,\Delta P = \dfrac{1}{2}$. Or les propriétés de la

Conclusion 0,5

T.F. donnent $\Delta X \Delta P \geq \dfrac{1}{2}$ ($\hbar = 1$).

On a donc un paquet d'ond d'extension minimale.

B.8. Sous l'action de V, on a $|n(t)\rangle = e^{-i\frac{E_n^2 t}{\hbar}} |n\rangle$

après l'application de la perturbation, on a
1 $|n(T_1)\rangle = e^{-i\frac{n^2\pi}{2}} |n\rangle$

Si on a n pair $n(T_1) = |n\rangle$.
n impair $n(T_1) = -i|n\rangle$.

en effet : si $n = 2p \rightarrow \frac{n^2}{2} = \frac{4}{2}p^2 = 2p^2$
$\rightarrow e^{-2i\pi p^2} = 1$

si $n = (2p+1) - \frac{n^2}{2} = 2p^2 + 2p + \frac{1}{2}$.

$\rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{-2i\pi(p^2+p)}}_{=1}$

0,5 ~~1~~ donc : $|\alpha(T_1)\rangle = \sum_{n \text{ pair}} c_n|n\rangle - i \sum_{n \text{ impair}} c_n|n\rangle$

~~1~~ B.9. 0,5 $= \left(\frac{1-i}{2}\right)|\alpha\rangle + \left(\frac{1+i}{2}\right)|-\alpha\rangle$.

1 en effet $\sum_{n \text{ pair}} c_n|n\rangle = \frac{|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle}{2}$.

$\sum_{n \text{ impair}} c_n|n\rangle = \frac{|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle}{2}$.

On a donc
$a_1 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$a_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\alpha_1 = \alpha$

$\alpha_2 = -\alpha$.