Examen de Physique Quantique du 17 décembre 2008 - Module 2L50PY1E2

Durée : 2h - Tous documents interdits

OSCILLATEUR HARMONIQUE ANISOTROPE A TROIS DIMENSIONS

On considère une particule de masse m et d'énergie potentielle

$$V(x,y,z)=\frac{m\omega^2}{2}\left[\left(1+\frac{2\lambda}{3}\right)(x^2+y^2)+\left(1-\frac{4\lambda}{3}\right)z^2\right],$$

dans un problème à trois dimensions, où ω et λ sont des constantes qui satisfont $\omega \geq 0$ et $0 \leq \lambda < 3/4$.

1. En séparant les variables cartésiennes x, y et z, écrire les trois équations à résoudre pour trouver les valeurs propres du hamiltonien.
2. En remarquant que chacune des équations ci-dessus correspond à un oscillateur harmonique de pulsation respective w_x, w_y, w_z, dont on précisera la valeur, montrer que les valeurs propres de l'énergie du hamiltonien sont données par

$$E(n_x,n_y,n_z)=\left((n_x+n_y+\alpha)\left(1+\frac{2\lambda}{3}\right)^{\beta}+(n_z+\gamma)\left(1-\frac{4\lambda}{3}\right)^{\beta}\right)\hbar\omega,$$

   avec n_x, n_y et n_z les nombres quantiques correspondant à chacune des équations ci-dessus. On précisera les valeurs de α, β et γ.
3. Calculer les énergies $\lambda = 0$ et $\lambda = 3/4$ pour l'état fondamental ainsi que les variations de cette énergie sur l'intervalle $\lambda \in [0, 3/4]$, en précisant les valeurs des dérivés à ces bornes. Même question pour le premier état excité. Discuter les dégénérescences éventuelles des énergies calculées.

MOMENT CINETIQUE

On considère un système de moment cinétique $\boldsymbol{J}$. Dans tout l'exercice, on se limitera à un sous-espace à trois dimensions, sous-tendu par les trois kets $|+1\rangle$, $|0\rangle$ et $|-1\rangle$, états propres communs à $\boldsymbol{J}^2$ (valeur propre $J(J+1)\hbar^2$ avec $J = 1$) et à $\boldsymbol{J_z}$ (valeurs propres $M\hbar$ égales à $+\hbar$, 0, $-\hbar$). L'hamiltonien H_0 du système est

$$H_0 = aJ_z + \frac{b}{\hbar}J_z^2$$

où a et b sont deux constantes positives, ayant les dimensions physiques d'une pulsation.

1. Montrer que les niveaux d'énergie du système peuvent se mettre sous la forme d'un polynôme du second degré en M. Pour quelle valeur du rapport b/a y a-t-il dégénérescence ?
2. On applique un champ statique $\boldsymbol{B_0}$ dans une direction $\boldsymbol{u}$ d'angles polaires θ et ϕ. L'interaction du moment magnétique $\boldsymbol{M} = \gamma \boldsymbol{J}$ (γ est le rapport gyromagnétique supposé

négatif) avec $\boldsymbol{B_0}$ est décrite par l'hamiltonien perturbatif $W = \omega_0 J_u$, avec la pulsation de Larmor $\omega_0 = -\gamma|B_0|$ et J_u la composante de **J** suivant la direction **u**

$$J_u = J_x \sin\theta\cos\phi + J_y \sin\theta\sin\phi + J_z \cos\theta.$$

Montrer que la matrice représentant W dans la base des trois états propres de H_0 ($|+1\rangle$, $|0\rangle$ et $|-1\rangle$) peut se mettre sous la forme

$$W = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} \cos\theta & \alpha\sin\theta\exp(-i\phi) & 0 \\ \alpha\sin\theta\exp(i\phi) & 0 & \alpha\sin\theta\exp(-i\phi) \\ 0 & \alpha\sin\theta\exp(i\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On précisera la valeur de α.

On rappelle que les opérateurs J_+ et J_- liés aux mesures de $\boldsymbol{J_x}$ et $\boldsymbol{J_y}$ peuvent s'exprimer sous forme de combinaisons linéaires $J_x = (J_+ + J_-) / 2$ et $J_y = (J_+ - J_-)/2i$, et que $J_\pm|JM\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - M(M\pm 1)}|JM\pm 1\rangle$.

3. On suppose que $a = b$, que la direction $\boldsymbol{u}$ est parallèle à Ox, et que d'autre part $\omega_0 << a$, ce qui permet de traiter W comme une perturbation de H_0.

   Calculer les états propres du système à l'ordre 0. Calculer également les énergies. On s'attachera à étudier plus particulièrement des levées de dégénérescences éventuelles en procédant le cas échéant à des diagonalisations de sous matrices.

4. On suppose maintenant que $b = 2a$, que $\boldsymbol{u}$ est de direction quelconque et que l'on peut encore traiter W comme une perturbation de H_0. Expliciter $|\psi_0\rangle$, le ket de l'état fondamental de l'hamiltonien $H + W$ qui est donné au premier ordre dans la base $|+1\rangle$, $|0\rangle$ et $|-1\rangle$ par

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle + \frac{\langle -1|W|0\rangle}{E_0 - E_{-1}}|-1\rangle + \frac{\langle +1|W|0\rangle}{E_0 - E_{+1}}|+1\rangle.$$

   On calculera les 2 éléments de matrices ainsi que les 3 énergies E_0, E_{-1} et E_{+1}.

5. Calculer la valeur moyenne $\langle \vec{M} \rangle$ du moment magnétique du système dans l'état $|\psi_0\rangle$, c'est-à-dire à l'ordre 1 en ω_0 /a.