UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE III

L3 LICENCE PHYSIQUE CHIMIE APPLICATION 2007 / 2008

Mention physique fondamentale

Examen de Physique Quantique du 16 janvier 2008 - Module 2L50PY1E2

Durée : 2h - Tous documents interdits

OSCILLATEUR HARMONIQUE

On considère un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m, de pulsation ω, de hamiltonien H et d'états stationnaires $|\varphi_n\rangle$ tels que $H|\varphi_n\rangle = (n+1/2)\hbar\omega|\varphi_n\rangle$. On définit l'opérateur *U(k)* tel que $U(k) = \exp(ikX)$, avec k réel et X l'opérateur position.

1. L'opérateur *U(k)* est-il unitaire ? Montrer que ses éléments de matrice vérifient la relation $\sum_{n'} \left|\langle\varphi_n|U(k)|\varphi_{n'}\rangle\right|^2 = 1$, quel que soit n.

2. Exprimer *U(k)* en fonction des opérateurs annihilation a et création a^+ définis à partir des observables réduites X', P' telles que $a = 1/\sqrt{2}\,(X'+iP')$ et $a^+ = 1/\sqrt{2}\,(X'-iP')$, avec le commutateur $[a, a^+] = 1$. On rappelle que $X' = \sqrt{m\omega/\hbar}\; X$ et $P' = 1/\sqrt{m\hbar\omega}\; P$.

   Mettre *U(k)* sous forme d'un produit d'opérateurs exponentiels en utilisant la relation dite de Glauber, valable pour deux opérateurs A et B qui commutent avec leur commutateur:

   $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)\exp(1/2[A,B])$.

3. Etablir les expressions: $\exp(\lambda a)|\varphi_0\rangle = |\varphi_0\rangle$ et $\langle\varphi_n|\exp(\lambda a^+)|\varphi_0\rangle = \dfrac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}$, avec λ un paramètre complexe quelconque. On rappelle la relation $\exp(x) = \sum_n \dfrac{x^n}{n!}$ et celle de récurrence $a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle$.

4. En déduire l'expression, en fonction de $E_k = \hbar^2 k^2/2m$ et $E_\omega = \hbar\omega$, de l'élément de matrice $\langle\varphi_0|U(k)|\varphi_n\rangle$. Que se produit-il lorsque k tend vers zéro ? Pouvait-on prévoir directement ce résultat ?

ATOME D'HYDROGENE PLACE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE

Les fonctions propres du hamiltonien $H_0 = \vec{P}^2/2m + V(r)$ pour un atome d'hydrogène non-perturbé sont en coordonnées sphériques $\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$. $\vec{P}$ représente le vecteur impulsion, m la masse de l'électron et *V(r)* l'énergie potentielle électrostatique. Les valeurs propres associées à ces fonctions propres sont données par $E_{nlm}^{(0)} = -E_I/n^2$, avec E_I = 13,6 eV.

On place cet atome d'hydrogène dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, parallèle à l'axe *Oz* et de faible intensité. L'électron qui gravite autour du proton se trouve alors placé dans un potentiel scalaire $V(r) = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r$ ainsi que dans un potentiel vecteur $\vec{A} = 1/2\,\vec{B} \wedge \vec{r}$. La présence de ce dernier fait que $\vec{P}$ est remplacé par $\vec{u} = \vec{P} - e\vec{A}$ dans le hamiltonien. Dans tout le problème, on néglige le spin de l'électron.

1. Ecrire le hamiltonien *H* du système en supposant $\vec{B}$ de suffisamment faible intensité pour pouvoir négliger les termes quadratiques devant les termes en *B*. On rappelle la relation vectorielle $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a})$. On admettra que $\vec{P}$ et $\vec{A}$ commutent.

2. Que représente le terme $-\mu_B/\hbar\;\vec{L}.\vec{B}$? On rappelle qu'on définit le magnéton de Bohr par $\mu_B = e\hbar/2m$.

3. Montrer que les Ψ_{nlm} sont fonctions propres de *H*.

4. Calculer les valeurs propres correspondantes E_{nlm} en fonction de $E_{nlm}^{(0)}$ et de $\omega = -\mu_B\,B/\hbar$, pulsation de Larmor.

5. On considère l'état fondamental $\left|\Psi_{100}\right\rangle$, ainsi que les trois sous-niveaux $\left|\Psi_{21m}\right\rangle$ du premier état excité. On posera $\hbar\Omega = E_{21m}^{(0)} - E_{100}^{(0)}$ et on prendra désormais l'origine des énergies en $E_{100}^{(0)}$. On suppose qu'à *t = 0* le système est dans l'état:

   $$\left|\phi_m(t=0)\right\rangle = \cos\alpha\left|\Psi_{100}\right\rangle + \sin\alpha\left|\Psi_{21m}\right\rangle.$$

   Quel est l'état $\left|\phi_m(t)\right\rangle$ du système à l'instant *t* ?

6. Après avoir exprimé les coordonnées cartésiennes *x*, *y* et *z* en fonction de *r*, θ et φ, les réexprimer en fonction des harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$.

   Rappel: les valeurs des harmoniques utiles au problème sont: $Y_0^0(\theta,\varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$, $Y_1^{\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{3/8\pi}\sin\theta\exp(\pm i\varphi)$ et $Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{3/4\pi}\cos\theta$. Elles sont liées entre elles -de manière générale- par les conditions de normalisation et d'orthogonalité, soient $\int_{sphère} Y_l^{m*}Y_{l'}^{m'}\sin\theta\,d\theta d\varphi = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}$.

7. En notant symboliquement $\left\langle\Psi_{nlm}\right|z\left|\Psi_{n'l'm'}\right\rangle$ l'ensemble des éléments de matrice de la composante *z*, calculer les trois éléments de matrice $\left\langle\Psi_{21m}\right|z\left|\Psi_{100}\right\rangle$ avec *m = 0, ±1*. On ne demande pas de calculer la partie radiale des intégrales et on posera donc

   $$\chi = \int_0^\infty R_{21}(r)R_{10}(r)r^3dr.$$

   Enfin, en admettant que les éléments de matrice $\left\langle\Psi_{nlm}\right|z\left|\Psi_{nlm}\right\rangle$ sont tous nuls, évaluer les valeurs moyennes de la composante *z* du moment dipolaire $\vec{D} = e\vec{r}$, soit $\left\langle D\right\rangle_z(t)$ dans l'état $\left|\phi_m(t)\right\rangle$, et ceci pour les trois valeurs de *m*.