UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III

L3 LICENCE PHYSIQUE CHIMIE APPLICATION
Mention physique fondamentale

2005 / 2006

Examen de Mécanique Quantique du 31 janvier 2006

Module 2L5PY11

Durée : 3h - Tous documents interdits

Système de spins (1h)

On considère une particule de spin ½. L'espace des états de spin est rapporté à la base des vecteurs $|+\rangle$ et $|-\rangle$, vecteurs propres de S_z, de valeurs propres $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$.

1. Le vecteur d'état $|\psi(0)\rangle$ du système, immédiatement après la mesure à l'instant t = 0 de S_y *pour laquelle on trouve* $+\hbar/2$, vaut :

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + i|-\rangle\right).$$

On applique un champ uniforme parallèle à Oz et dépendant du temps. L'opérateur hamiltonien du spin H(t) s'écrit alors :

$$H(t) = \omega_0(t) S_z.$$

On suppose que $\omega_0(t)$ est une fonction nulle pour t < 0 et t > T, et croissant linéairement de 0 à ω_0 lorsque 0 ≤ t ≤ T (T est un paramètre donné, homogène à un temps). Montrer qu'à l'instant t le vecteur d'état peut s 'écrire :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\theta(t)}|+\rangle + ie^{-i\theta(t)}|-\rangle\right],$$

où $\theta(t)$ est une fonction réelle de t que l'on calculera.

2. A un instant t = τ > T, on mesure S_y.

Quels résultats peut-on trouver, et avec quelles probabilités ? Déterminer la relation qui doit exister entre ω_0 et T pour que l'on soit sûr du résultat. Interprétation physique ?

Oscillateur harmonique chargé (2h)

Un oscillateur harmonique à une dimension est constitué par une particule de masse m, de charge q et d'énergie potentielle $V(X) = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$. En introduisant les observables $X' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X$ et $P' = \frac{P}{\sqrt{m\hbar\omega}}$ ainsi que les opérateurs d'annihilation a et de création a^+, tels que $a = \frac{X' + iP'}{\sqrt{2}}$ et $a^+ = \frac{X' - iP'}{\sqrt{2}}$, l'hamiltonien correspondant peut s'écrire $H = \hbar\omega(a^+a + 1/2)$ (avec $[a, a^+] = 1$).

PARTIE A : En absence de champ électrique

On se propose ici d'étudier les états propres $|\alpha\rangle$ de l'opérateur a : $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

1. On décompose $|\alpha\rangle$ sur la base habituelle $\{|n\rangle\}$ des états propres de H : $|\alpha\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$. En utilisant la relation de récurrence $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, montrer que pour toute valeur de α complexe, il existe une autre relation de récurrence entre les coefficients C_n, ce qui permet de les calculer tous à partir un premier C_0. En déduire qu'il existe un état propre $|\alpha\rangle$ de a quel que soit α.

2. Calculer les coefficients C_n en normalisant $|\alpha\rangle$.

3. Quelle est la probabilité de trouver $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ lors d'une mesure de l'énergie sur l'état $|\alpha\rangle$.

4. Calculer la valeur moyenne de l'énergie.

5. On suppose qu'à l'instant *t = 0*, l'oscillateur est dans un état $|\alpha\rangle$. Montrer qu'à chaque instant *t* ultérieur, il est dans un autre état propre $|\alpha(t)\rangle$ de l'opérateur a.

PARTIE B : Dans un champ électrique variable

On suppose -dans cette seconde partie- que la particule est maintenant plongée dans un champ électrique ε(t) parallèle à Ox et dépendant du temps, de sorte qu'il faut ajouter à V(X) l'énergie potentielle :

$$W(t) = -q\varepsilon(t)X.$$

1. Ecrire l'hamiltonien H(t) de la particule en fonction des opérateurs a et a^+, après avoir exprimé les observables X et P en fonction de ces derniers. Montrer que le commutateur $[a,H(t)]$ peut se mettre sous la forme $[a,H(t)]=\hbar\omega a - q\varepsilon(t)\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{\beta}$, en précisant la valeur de β. De même, calculer le commutateur $[a^+,H(t)]$.

2. Soit α(t) le nombre défini par :

$$\alpha(t) = \langle\Psi(t)|a|\Psi(t)\rangle,$$

où $|\Psi(t)\rangle$ est le vecteur d'état normé de la particule étudiée. Après avoir démontré la relation :

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar}\langle\Psi|[a,H(t)]|\Psi\rangle,$$

déduire que α(t) satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = -i\omega\alpha(t) + i\lambda(t),$$

où λ(t) est défini par : $$\lambda(t) = \frac{q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\varepsilon(t).$$

Intégrer cette équation différentielle en posant f(t), la contribution du champ électrique. Quelles sont –à l'instant t- les valeurs moyennes de la position et de l'impulsion de la particule ?

3. Le ket $|\varphi(t)\rangle$ est défini par :

$$|\varphi(t)\rangle = [a - \alpha(t)]|\Psi(t)\rangle$$

où α(t) a la valeur calculée en 2). En utilisant les résultats des questions 1) et 2), montrer que l'évolution de $|\varphi(t)\rangle$ est donnée par :

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle = [H(t) + \hbar\omega]|\varphi(t)\rangle.$$

Comment varie la norme de $|\varphi(t)\rangle$ en fonction du temps ?